



研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

非线性振动

Nonlinear Vibrations

4

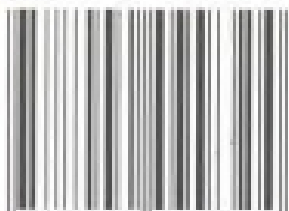
刘延柱 陈立群 编著

高等教育出版社



研究生教学用书 教育部研究生工作办公室推荐

ISBN 7-04-009932-2



9 787040 099324 >

定价 33.90 元

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

非线性振动

Nonlinear Vibrations

刘延柱 陈立群 编著

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

非线性振动/刘延柱,陈立群编著. —北京:高等教育出版社,
2001.8

研究生教学用书

ISBN 7-04-009932-2

I. 非... II. 刘... III. 非线性振动-研究生-教材 IV. 0322

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 035204 号

非线性振动

刘延柱 陈立群 编著

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号 邮政编码 100009

电 话 010-64054588 传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 国防工业出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16

版 次 2001 年 8 月第 1 版

印 张 24.75

印 次 2001 年 8 月第 1 次印刷

字 数 390 000

定 价 33.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

内 容 提 要

本书为教育部研究生工作办公室推荐的研究生教学用书。书中系统地叙述非线性振动的基本理论、研究方法以及各种典型的非线性振动现象。本书采用研究方法与振动类型两种体系兼顾的叙述方式,并注意兼顾传统的非线性振动理论与近代非线性动力学的最新发展。全书除绪论以外共分六章。在第一章非线性振动的定性分析方法和第二章非线性振动的近似解析方法中,系统地叙述了非线性振动理论的两类基本研究方法。在第三章自激振动和第四章参数振动中,则综合应用上述两类研究方法讨论两种重要的非线性振动类型。第五章分岔理论基础和第六章混沌振动是关于近代非线性动力学研究成果的系统介绍。虽然关于单自由度系统的讨论占书中的主要篇幅,但各相应章节都包含多自由度系统内容。书中的公式推导力求简练化,并注意解释各种非线性振动现象的物理意义,以及与实际工程技术问题的紧密联系。在附录中给出一些重要定理和方法的数学证明。各章均附有例题和习题,书末给出习题答案。

本书可作为理工科高等院校非线性振动研究生课程的教材,也可供机械、航空、自动控制、无线电、电子学等领域内的工程技术人员参考。

前 言

随着科学技术的发展,机械振动问题已成为各个工程领域内经常出现的重要问题。电子计算机的广泛使用和动态测量技术的进步为复杂振动问题的解决提供了有力的工具。因此,振动力学已成为工程技术人员必须具备的理论知识。机械、航空、土建、水利等工程专业的本科生在振动力学或与振动力学有关的其他课程中,已经获得了以线性振动理论为主要内容的振动力学基本知识。在线性常系数常微分方程理论上建立起来的线性振动理论是对振动现象的近似描述。线性振动理论只能在振幅足够小的特定情况下反映振动的客观规律。但实际的机械系统存在着各种非线性因素,在许多情况下,线性理论不能解释像自激振动、参数振动、多频响应、超谐和亚谐振动、内共振、跳跃现象和同步现象等复杂的振动现象。而上述各种非线性振动现象在现代工程技术中愈来愈频繁地出现。这就要求未来的工程师们不仅要掌握线性振动理论的基本知识,而且也要了解非线性振动的基本理论和分析、计算方法,以解决工程技术中的实际振动问题。

作者在所编著的教材《振动力学》(高等教育出版社 1998 年出版)中曾试图使学生在本科生阶段就能了解非线性振动的初步知识,并在研究生阶段学习更系统深入的非线性振动理论。本书就是为此目的编写的研究生教材。主要内容来自《振动力学》的提高部分,以及作者于 1963 年在清华大学为工程力学专业编写的非线性振动讲义。在此基础上,根据国务院学位委员会学科评议组的审定意见,作了必要的补充和加深。除非线性振动的传统理论以外,对反映近代非线性动力学研究成果的分岔和混沌理论的内容,也作了适当的扩充。

非线性振动理论的叙述可以不同的研究方法为主线,也可以不同的振动类型为主线。本书采用两种主线相结合的叙述方式。全书除绪论以外共分六章。在第一章非线性振动的定性分析方法和第二章非线性振动的近似解析方法中,系统地叙述了非线性振动理论的两类基本研究方法。在第三章自激振动和第四章参数振动中,则综合应用上述两类研究方法讨论这两种重要的非线性振动现象。第五章分岔理论基础和第六章混沌

振动是关于近代非线性动力学研究成果的系统介绍。虽然关于单自由度系统的讨论占书中的主要篇幅,但各相应章节都包含多自由度系统内容。在编写过程中,作者力图贯彻理论联系实际的原则,尽量使正文中的公式推导简练,注意解释非线性振动现象的物理意义,以及与实际工程技术问题的紧密联系。一些重要定理和方法的数学证明则放在附录中给出。各章均附有例题和习题,书末给出习题的参考答案。

本书的第一至四章由刘延柱编写,第五、六章由陈立群编写。全书由刘延柱定稿。书稿承蒙陆启韶教授详细审阅并提出许多宝贵意见,戈新生教授协助书稿的校对工作,与本书相关的研究工作得到国家自然科学基金和上海市科技发展基金的资助,作者谨表示衷心感谢。限于水平,书中的错误和不足之处恳请读者指正。

作 者

2001 年 4 月

主要符号表

a	振幅
A	振幅
\mathbf{A}	在零点计算的雅可比矩阵
B	激励幅值
c	粘性阻力系数
cc	左边各项的共轭复数
C	平面域的边界曲线
$\text{Codim } g$	函数 g 的余维数
d	维数
d_c	关联维数
d_i	信息维数
d_H	豪斯多夫维数
d_L	李雅普诺夫维数
d_p	点状维数
d_q	q 阶广义维数
D	平面域
D_n	第 n 阶偏微分算子
$\mathbf{D}_x f(x_0, \mu_0)$	f 关于 x 的雅可比矩阵
E	保守系统的总机械能
E^c	中心子空间
E^s	稳定子空间
E^u	不稳定子空间
F	激励力的幅值
g_l	约化函数
h	闭轨迹的特征指数
$h(x, \mu)$	戈鲁比茨基 - 沙弗范式
H	哈密顿函数

H_n^l	从 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R}^n 的所有 l 次齐次多项式构成的线性空间
j	庞加莱指数
J	雅可比矩阵
k	线性弹簧的刚度系数
$\text{Ker } A$	矩阵 A 对应的线性变换的核空间
L^*	矩阵 L 的复共轭转置
m	质量
$M(\tau)$	梅利尼科夫函数
P	庞加莱映射
$R_x(\tau)$	自相关函数
$\text{range } A$	矩阵 A 对应的线性变换的值域
s	频率比
S	曲面或空间,吸引盆
S^\perp	空间 S 的正交补空间
S_j	第 j 个奇点
T	周期运动的周期
T_n	第 n 阶尺度的时间变量
V	保守系统的势能
$W^c(x_0)$	平衡点 x_0 的中心流形
$W^s(x_0)$	平衡点 x_0 的稳定流形
$W_{\text{loc}}^s(x_0)$	平衡点 x_0 的局部稳定流形
$W^u(x_0)$	平衡点 x_0 的不稳定流形
$W_{\text{loc}}^u(x_0)$	平衡点 x_0 的局部不稳定流形
α	不确定指数
Γ	相空间中的闭轨迹
ε	小参数
$\Phi_x(\omega)$	功率谱
θ	相位差
λ	本征值
λ_1	最大李雅普诺夫指数
$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$	李雅普诺夫指数
μ	小参数

μ	分岔参量
μ_0	分岔值
σ	移位自同构
Σ_A	符号空间
ψ	相角
ω	周期运动的角频率
ω_0	线性系统的固有频率

责任编辑	黄毅
封面设计	李卫青
责任绘图	尹莉
版式设计	史新薇
责任校对	殷然
责任印制	杨明

目 录

绪论	1
§ 0.1 非线性振动的研究对象	1
§ 0.2 非线性振动的研究方法	2
§ 0.3 非线性振动的发展简史	4
§ 0.4 单自由度线性振动的主要结论	6
第一章 非线性振动的定性分析方法	8
§ 1.1 稳定性理论的基本概念	8
§ 1.2 相平面、相轨迹和奇点	19
§ 1.3 奇点的分类	35
§ 1.4 极限环	43
习题	53
第二章 非线性振动的近似解析方法	57
§ 2.1 谐波平衡法	57
§ 2.2 正规摄动法	63
§ 2.3 林滋泰德-庞加莱法	67
§ 2.4 平均法	73
§ 2.5 多尺度法	83
§ 2.6 渐近法	95
§ 2.7 多自由度系统的自由振动和受迫振动	109
习题	123
第三章 自激振动	126
§ 3.1 自激振动概述	126
§ 3.2 工程中的自激振动	128
§ 3.3 自激振动的定性分析	135
§ 3.4 自激振动的定量计算	138
§ 3.5 自激系统的受迫振动	143
§ 3.6 多自由度系统的自激振动	147
习题	150
第四章 参数振动	152
§ 4.1 参数振动概述	152

§ 4.2	工程中的参数振动	154
§ 4.3	弗洛凯理论	157
§ 4.4	稳定图	160
§ 4.5	非线性参数振动	170
§ 4.6	多自由度系统的参数振动	172
习题		176
第五章	分岔理论基础	179
§ 5.1	分岔现象	179
§ 5.2	李雅普诺夫-施密特约化	188
§ 5.3	中心流形方法	194
§ 5.4	庞加莱-伯克霍夫范式	207
§ 5.5	奇异性理论	216
§ 5.6	霍普夫分岔及其控制	224
§ 5.7	闭轨迹的分岔	231
§ 5.8	分岔问题的数值方法	243
习题		247
第六章	混沌振动	250
§ 6.1	混沌振动概述	250
§ 6.2	工程中的混沌振动	260
§ 6.3	混沌振动的数值识别	266
§ 6.4	混沌振动的解析预测	286
§ 6.5	哈密顿系统的混沌振动	302
§ 6.6	混沌振动的控制	312
习题		317
附录		320
附录一	李雅普诺夫稳定性定理的证明	320
附录二	闭轨迹稳定性定理的证明	322
附录三	小参数法的数学根据	324
附录四	平面霍普夫分岔定理的证明	333
附录五	混沌的拓扑描述	338
附录六	梅利尼科夫函数的推导	347
附录七	什尔尼科夫定理的证明思路	349
习题答案		353
参考文献		359
索引		366
外国人名译名对照表		375

目录	3
----	---

Synopsis	377
Contents	379
作者简介	382

绪 论

§ 0.1 非线性振动的研究对象

在自然界、工程技术、日常生活和社会生活中,普遍存在着物体的往复运动或状态的循环变化。这类现象称为**振荡**。例如大海的波涛起伏、花的日开夜闭、钟摆的摆动、心脏的跳动、经济发展的高涨和萧条等形形色色的现象都具有明显的振荡特性。**振动**是一种特殊的振荡,即平衡位置附近微小或有限的振荡。如声波和超声波、工程技术中的机器和结构物的机械振动、无线电和光学中的电磁振荡等。从最小的粒子到巨大的天体,从简单的摆到复杂的生物体,无处不存在振动现象。有时人们力图防止或减小振动,有时又力图制造和利用振动。尽管振动现象的形式多种多样,但有着共同的客观规律和统一的数学表达形式。因此,有可能建立统一的理论来进行研究,即**振动力学**。振动力学是力学、声学、无线电、电子学、自动控制理论等学科,以及机械、航空、土木、水利等工程学科的理论基础之一。它应用数学分析、实验量测和数值计算等方法,探讨振动现象的机理和基本规律,为解决与振动有关的实际问题提供理论依据。

根据描述振动的数学模型的不同,振动理论区分为**线性振动理论**和**非线性振动理论**。线性振动理论适用于线性系统,即质量不变、弹性力和阻尼力与运动参数成线性关系的系统,其数学描述为线性常系数常微分方程。不属于线性系统的系统为非线性系统,研究非线性系统的振动理论就是非线性振动理论。线性振动理论是对振动现象的近似描述,在振幅足够小的大多数情况下,线性振动理论可以足够准确地反映振动的客观规律。频率、振幅、相位、激励、响应、模态等都是在线性理论中建立起来的基本概念。

实际机械系统中广泛存在着各种非线性因素,如电场力、磁场力、万有引力等作用力非线性,法向加速度、科氏加速度等运动学非线性,非线性本构关系等材料非线性,弹性大变形等几何非线性等。因此,工程实际

中的振动系统绝大多数都是非线性系统。由于非线性微分方程尚无普遍有效的精确求解方法,而线性常微分方程的数学理论已十分完善,因此将非线性系统以线性系统代替是工程中常用的有效方法,但仅限于一定的范围。当非线性因素较强时,用线性理论得出的结果不仅误差过大,而且无法对自激振动、参数振动、多频响应、超谐和亚谐共振、内共振、跳跃现象和同步现象等实际现象作出解释。而上述各种实际现象在现代工程技术中愈来愈频繁地出现。早在 1940 年美国塔可马(Tacoma)吊桥因风载引起振动而坍塌的事故就是典型的非线性振动引起破坏的例子。因此,有必要发展非线性振动理论,研究对非线性系统的分析和计算方法,解释各种非线性现象的物理本质,以分析和解决工程技术中实际的非线性振动问题。

参数振动是一种特殊的振动形式,它的数学模型不一定是非线性微分方程,也可能是线性的,但系数不是常数,而是时间的周期函数,因此不属于线性振动理论的研究范围,也作为非线性振动的组成部分。

§ 0.2 非线性振动的研究方法

非线性振动理论的研究目的是基于非线性振动系统的数学模型,在不同参数和初始条件下,确定系统运动的定性特征和定量规律。非线性振动系统的数学模型为非线性微分方程。与线性微分方程不同,非线性微分方程尚无普遍有效的求解方法,很难得到精确的解析解。对于工程中的实际非线性振动问题,除采用实验方法进行研究以外,常用的理论研究方法为:几何方法、解析方法和数值方法。

几何方法是研究非线性振动的一种定性分析方法。传统的几何方法是利用相平而内的相轨迹作为对运动过程的直观描述。在常微分方程定性理论的基础上,根据相轨迹的几何性质判断微分方程解的性质。利用相平而内的奇点和极限环作为平衡状态和孤立周期运动的几何表述。因此,关于奇点的类型和稳定性的研究,关于根限环的存在性和稳定性的研究,以及稳定性随参数变化的研究,是传统几何方法讨论的主要内容。几何方法的周限性是不能得到非线性振动的定量规律,而且传统的几何方法通常难以推广到高维时变系统。尽管如此,几何方法仍在非线性振动研究中起着重要作用。几何方法不仅能得到直观的定性结果,而且可为其他研究方法提供理论依据。

在非线性振动理论的现代发展过程中,几何方法有了新的研究内容。现代几何方法也研究由数学抽象所得到的人为构建的几何结构,它具有与真实非线性系统类似的性质。例如在第六章关于混沌振动的讨论中,就充分利用抽象的几何概念解释和预测非线性振动系统的一些复杂的动力学行为。

解析方法是研究非线性振动的定量分析方法。即通过精确地或近似地寻求非线性微分方程的解析解,得到非线性系统的运动规律,以及对系统参数和初始条件的依赖关系。非线性微分方程的精确解通常涉及非初等函数(例如椭圆函数)的引入和研究。能够得到精确解的非线性系统称为可积系统,这种系统的数量极其有限。

更常用的解析方法是近似解析方法。近似解析方法主要适用于弱非线性系统,即与线性系统十分接近的非线性系统。通常是以线性振动理论中得到的精确解为基础,将非线性因素作为一种摄动,求出近似的解析解。最早的近似解析方法来源于天体力学中的摄动法,也称为小参数法,如正规摄动法和林滋泰德-庞加莱法。近似解析方法还包括其他形式,如谐波平衡法、平均法、多尺度法和渐近法等。这些近似解析方法原则上也可应用于特殊的强非线性系统。如果存在与之相近而又精确可积的非线性系统,则也可对精确的非线性解进行摄动。解析方法原则上对单自由度系统和多自由度同样适用。对于用非线性偏微分方程描述的无穷多自由度的连续体振动,可利用模态的正交性或伽辽金方法化作只含时间自变量的非线性常微分方程组,然后利用近似解析方法进行处理。也可直接对非线性偏微分方程进行摄动分析。任何一种近似解析方法所得到的结果都是近似的结果,必须与其他方法互相印证。解析方法的局限性是应用范围十分有限,仅用于讨论可积和接近可积系统的平衡和周期运动。而且解析方法得到的解未必具有稳定性,因此可能不是实际问题中能出现的运动。解析方法的优点是不仅能确定非线性系统的运动随时间变化的规律,而且能得到运动特性与系统参数之间的依赖关系,因此是非线性振动问题研究的重要方法。

数值方法是研究非线性振动系统的数值计算方法。数值方法通过数值求解非线性微分方程,得到非线性系统在特定的参数条件和初始条件下的运动规律。数值方法的基础是常微分方程组的初值问题的数值解法。数值方法既可以计算特定非线性系统的各种运动的时间历程,包括平衡、周期运动和非周期运动等,也可以通过数值计算确定参数对系统运

动的影响,以及通过对吸引盆及其边界的计算确定初始条件对系统运动的影响。由于处理非线性振动问题的数学工具尚不完备,数值方法起着非常重要甚至是不可替代的作用。数值方法在非线性振动中的突出作用是发现新现象,这已成为非线性振动现代发展的突出特点。数值方法还可以补充理论研究结果,使一些理论结果定量化,或揭示有关条件不成立时可能发生的情况。数值方法得到的直观的结果可为理论研究提供启示,激发灵感。此外,数值方法还具有检验理论结果的作用,在非线性振动问题研究中,数值计算和实验验证往往是理论分析的最终检验。

需要指出的是,数值研究只能在有限精度下进行。即使不考虑建立模型本身的误差,数值方法在应用过程中也不可避免地存在截断误差和舍入误差。数值运算如积分求解非线性微分方程等极限过程都是强制性地取有限项近似,因此存在截断误差。在计算机中无限多位的实数是通过有限位的截尾数来近似的,因此存在舍入误差。截断误差和舍入误差对计算结果的影响称为计算机噪声。在数值研究过程中,计算机噪声通常可以通过改变计算精度、积分步长和计算方法加以考察。因此,对于数值计算结果的真实性的必须仔细分析,在可能条件下,必须结合理论和实验研究进行检验和诠释。

§ 0.3 非线性振动的发展简史

人类对振动现象的了解和利用有着漫长的历史,远古时期的先民已有利用振动发声的各种乐器。在我国,早在战国时期成书的《庄子》就已明确记载了共振现象。现代物理科学的奠基人伽里略(G. Galilei)对振动问题进行了开创性的研究。他发现了单摆的等时性并利用他的自由落体公式计算单摆周期。在 17 世纪,惠更斯(C. Huygens)注意到单摆大幅摆动对等时性的偏离以及两只频率接近时钟的同步现象,是对非线性振动现象的最早记载。

严格的非线性振动的理论研究开始于 19 世纪后期,由庞加莱(H. Poincaré)奠定了理论基础。他开辟了振动问题研究的一个全新方向,即定性理论。在 1881 年至 1886 年的一系列论文中,庞加莱讨论了二阶系统奇点的分类,引入了极限环概念并建立了极限环的存在判据,定义了奇点和极限环的指数;此外还研究了分岔问题。定性理论的一个特殊而重

要的方面是稳定性理论,最早的研究结果是 1788 年拉格朗日(J. L. Lagrange)建立的保守系统平衡位置的稳定性判据。1892 年李雅普诺夫(A. M. Lyapunov)给出了稳定性的严格定义,并提出了研究稳定性问题的直接方法。

在非线性振动的近似解析方法方面,1830 年泊松(S. D. Poisson)研究单摆振动时提出摄动法的基本思想。1883 年林滋泰德(A. Lindstedt)解决了摄动法的久期项问题。1892 年庞加莱建立了摄动法的数学基础。1918 年达芬(G. Duffing)在研究硬弹簧受迫振动时采用了谐波平衡和逐次迭代的方法。早在拉格朗日的时代,天体力学中已经采用平均法计算行星轨道的演化。1920 年范德波尔(B. van der Pol)将平均法思想用于研究电子管的非线性振荡。1934 年克雷洛夫(N. M. Krylov)和包戈留包夫(N. N. Bogoliubov)将平均法发展为适用于一般弱非线性系统的近似计算方法。1947 年他们又提出一种可求任意阶近似解的渐近法,1955 年米特罗波夫斯基(Y. A. Mitropolsky)将这种方法推广到非定常系统最终形成 KBM 法。1957 年斯特洛克(P. A. Sturrock)在研究电等离子体非线性效应时用两个不同尺度描述系统的解而提出多尺度法,1965 年奈弗(A. H. Nayfeh)等使多尺度法进一步完善化。

非线性振动的研究使人们对振动的机制有新的认识。认识到除自由振动和受迫振动以外,还广泛存在另一类振动,即自激振动,1926 年范德波尔研究了三极电子管回路的自激振动;1932 年邓哈托(J. P. Den Hartog)利用自激振动分析输电线的舞动。1933 年贝克(J. G. Baker)的工作表明有能源输入时干摩擦会导致自激振动。非线性振动的研究还有助于人们认识一种新的运动形式:混沌振动。庞加莱在 19 世纪末已经认识到不可积系统存在复杂的运动形式,运动对初始条件具有敏感依赖性,现在称这种运动形式为混沌。1945 年卡特莱特(M. L. Cartwright)和李特伍德(J. E. Littlewood)对受迫范德波尔振子及莱文森(N. Levinson)对一类更简化的模型分析表明,两个不同的稳态运动可能具有任意长时间的相同暂态过程,这表明运动具有不可预测性。为解释卡特莱特和李特伍德、莱文森的结果,斯梅尔(S. Smale)提出了马蹄映射的概念。上田(Y. Ueda)和林千博(C. Hayashi)发表于 1973 年的工作表明他们在研究达芬方程时得到一种混乱、貌似随机且对初始条件极度敏感的数值解。混沌振动的发现和研究开阔了一个活跃的新领域,使非线性振动学科进入新的发展阶段。

§ 0.4 单自由度线性振动的主要结论

0.4.1 自由振动

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (0.4.1)$$

(1) $\zeta = 0$ 时系统作频率为 ω_0 的简谐振动:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \theta) \quad (0.4.2)$$

其中 ω_0 为保守系统的固有频率, $T = 2\pi/\omega_0$ 为自由振动的周期。振幅 A 和相位差 θ 取决于初始条件。

(2) $0 < \zeta < 1$ 时系统作衰减振荡:

$$x = Ae^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_d t + \theta) \quad (0.4.3)$$

其中频率 $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ 小于系统的固有频率。每过一周, 振幅减小 $\eta = e^{2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$ 倍。

(3) $\zeta \geq 1$ 时, 系统作衰减的非周期运动。

(4) $\zeta < 0$ 时为负阻尼, 系统作发散振荡。

0.4.2 受迫振动

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = B\omega_0^2 \sin \omega t \quad (0.4.4)$$

(1) $\omega \neq \omega_0$ 时稳态响应是与激励频率 ω 相同的简谐振动:

$$x = A \sin(\omega t - \theta) \quad (0.4.5)$$

(2) 稳态响应的振幅 A 取决于激励的幅值 B 和频率比 $s = \omega/\omega_0$ (图 0.1):

$$\beta = \frac{A}{B} = \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)^2 + (2\zeta s)^2}} \quad (0.4.6)$$

(3) 稳态响应的相位差 θ 取决于频率比 $s = \omega/\omega_0$ (图 0.2):

$$\theta = \arctan \frac{2\zeta s}{1-s^2} \quad (0.4.7)$$

(4) 激励频率为 $\omega_m = \omega_0 \sqrt{1-2\zeta^2}$ 时稳态响应的振幅 A 有极大值, 称为共振, ω_m 为共振频率。

(5) $\zeta = 0, \omega = \omega_0$ 时系统作振幅随时间增大的发散振荡, 即共振的过渡过程:

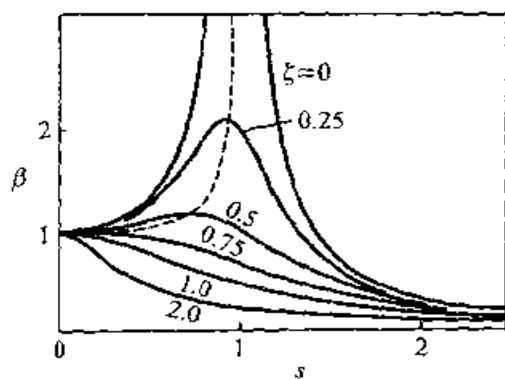


图 0.1 幅频特性曲线

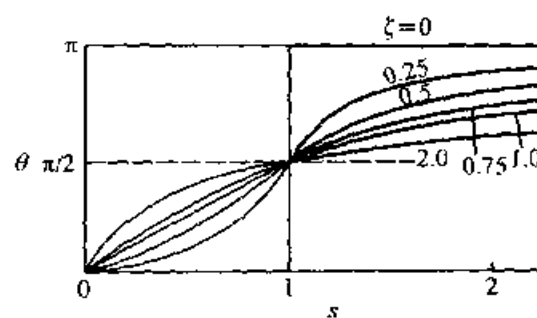


图 0.2 相频特性曲线

$$x = -\frac{1}{2}B\omega_0 t \cos \omega_0 t \quad (0.4.8)$$

(6) 系统在若干激励力同时作用下的响应,等于它们单独作用时的响应的叠加。

第一章 非线性振动的 定性分析方法

非线性振动的定性分析方法是由运动微分方程出发,直接研究解的性质以判断运动性态的方法。定性分析方法主要用于研究振动系统可能发生的稳态运动,如平衡状态或周期运动,以及稳态运动在初始扰动作用下的稳定性问题。在工程问题中,稳态运动往往对应于机械系统的正常工作状态。这种工作状态必须是稳定的,因为只有稳定的运动才是可实现的运动。李雅普诺夫稳定性理论是研究运动稳定性的理论基础,本章首先介绍与李雅普诺夫稳定性理论有关的基本概念。

相平面法是最直观的定性分析方法,它只适用于单自由度系统。相平面法利用相轨迹描绘系统的运动性态。相轨迹的奇点和极限环分别对应于系统的平衡状态和周期运动。分析奇点和极限环的类型可以判断平衡状态和周期运动的稳定性,以及受扰动后可能具有的振动特性。平衡状态或周期运动的数目和稳定性可随系统参数的变动而突然变化,称为分岔现象。关于分岔理论的基本内容本书将在第五章中叙述。

§ 1.1 稳定性理论的基本概念

1.1.1 稳态运动和扰动方程

能产生振动的机械系统称为振动系统,也称为动力学系统,或简称系统。利用理论力学知识可以对 N 个自由度的系统建立动力学微分方程。首先选择 N 个广义坐标 $q_j (j=1,2,\cdots,N)$ 确定系统的位形。 N 个广义坐标与 N 个广义速度 $\dot{q}_j (j=1,2,\cdots,N)$ 组成 $2N$ 个状态变量,记作 $y_j (j=1,2,\cdots,2N)$,则动力学方程可表达为以 $y_j (j=1,2,\cdots,2N)$ 为未知变量的一阶常微分方程组,其一般形式为

$$\dot{y}_j = Y_j(y_1, y_2, \cdots, y_{2N}, t) \quad (j=1,2,\cdots,2N) \quad (1.1.1)$$

此 $2N$ 个状态变量的微分方程组称为系统的状态方程。以状态变量为

基,建立抽象的 $n=2N$ 维空间 \mathbb{R}^n 称为状态空间或相空间。相空间内的每个点与状态变量的每一组值相对应,称为相点。随着时间的推移,相点在相空间中的位置不断改变,所描绘出的超曲线称为相轨迹,由状态方程(1.1.1)的解确定。对于单自由度振动系统的特殊情形, $n=2$,相空间退化为二维的相平面,相轨迹成为平面曲线。

引入 n 维列阵 $y=(y_j)$ 和 $Y=(Y_j)$,则方程(1.1.1)也可写为矩阵形式:

$$\dot{y} = Y(y, t) \quad (1.1.2)$$

此方程满足解的存在与唯一性条件。设方程(1.1.2)存在特解 $y = y_s(t)$,满足

$$\dot{y}_s = Y(y_s, t) \quad (1.1.3)$$

此特解所描述的系统的某种特定运动在实践中对应于某种正常状态,如某种平衡状态或周期运动。将此特定的运动称为系统的未受干扰的运动,简称未扰运动或稳态运动。只要状态变量的初始值满足稳态运动的要求, $y(t_0) = y_s(t_0)$,则此稳态运动必能实现为系统的实际运动。若状态变量的初始值 $y(t_0)$ 偏离 $y_s(t_0)$,则系统的运动将偏离稳态运动,称为该稳态运动的受扰运动。受扰运动 $y(t)$ 与未扰运动 $y_s(t)$ 是同一动力学方程(1.1.2)但不同初始条件的解,引入受扰运动与未扰运动的差值作为新的变量 $x(t)$,

$$x(t) = y(t) - y_s(t) \quad (1.1.4)$$

$x(t)$ 称为扰动,其初始值 $x(0)$ 为初扰动。将方程(1.1.2)与(1.1.3)相减,得到确定扰动规律的微分方程,即扰动方程:

$$\dot{x} = X(x, t) \quad (1.1.5)$$

其中

$$X(x, t) = Y(y_s + x, t) - Y(y_s, t) \quad (1.1.6)$$

于是系统的未扰运动与扰动方程的零解 $x(t) \equiv 0$ 完全等价。相空间中与零解对应的点称为平衡点。

1.1.2 李雅普诺夫稳定性定义

在工程实际问题中常需要判断系统的某种稳态运动是否稳定,即当状态变量受到微小的初扰动后,其受扰运动规律是否仍接近未扰运动规律。由于未扰运动与扰动方程(1.1.6)的零解等价,上述稳定性问题转化

为方程(1.1.6)的零解稳定性问题。1892年李雅普诺夫首先给出稳定性概念的严格定义。

定义一：若给定任意小的正数 ϵ , 存在正数 δ , 对于一切受扰运动, 只要其初扰动满足 $\|x(t_0)\| \leq \delta$, 对于所有 $t > t_0$ 均有 $\|x(t)\| < \epsilon$, 则称未扰运动 $y_s(t)$ 是稳定的。

此稳定性定义的几何解释是, 在相空间内以零点为中心作 $\|x\| = \epsilon$ 的球面 S_ϵ 和 $\|x\| = \delta$ 的球面 S_δ , 从 S_δ 内出发的每一条相轨迹将永远限制在 S_ϵ 以内(图 1.1 曲线 a)。

定义二：若未扰运动稳定, 且当 $t \rightarrow \infty$ 时均有 $\|x(t)\| \rightarrow 0$, 则称未扰运动 $y_s(t)$ 是渐近稳定的。

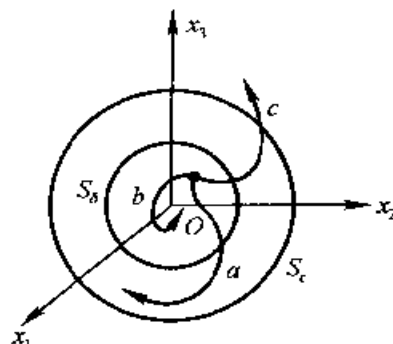


图 1.1 稳定性的几何解释

渐近稳定的几何解释是相空间内从 S_δ 内出发的每一条相轨迹都渐近地向原点趋近(图 1.1 曲线 b)。

定义三：若存在正数 ϵ_0 , 对任意 δ , 存在受扰运动 $y(t)$, 当其初扰动满足 $\|x(t_0)\| \leq \delta$ 时, 存在时刻 $t_1 > t_0$, 满足 $\|x(t)\| = \epsilon_0$, 则称未扰运动 $y_s(t)$ 是不稳定的。

不稳定的几何解释是不论相空间内的 S_δ 选择如何小, 总有一条从 S_δ 内出发的相轨迹最终到达 S_ϵ 的边界(图 1.1 曲线 c)。

1.1.3 李雅普诺夫直接方法

李雅普诺夫直接方法是研究运动稳定性的重要方法。它不对扰动方程求解, 而是构造具有某种性质的函数, 即李雅普诺夫函数, 使该函数与扰动方程相联系以估计受扰运动的趋向, 从而判断未扰运动的稳定性。扰动方程(1.1.5)的右端不显含时间的振动系统称为自治系统, 显含时间的系统称为非自治系统。本节只讨论自治系统情形, 扰动方程写为

$$\dot{x} = X(x) \quad (1.1.7)$$

李雅普诺夫直接方法的理论基础由以下三个定理组成:

定理一：若能构造可微正定函数 $V(x)$, 使得沿扰动方程(1.1.7)解曲线计算的全导数 \dot{V} 为半负定或等于零, 则系统的未扰运动稳定。

定理二：若能构造可微正定函数 $V(x)$, 使得沿扰动方程(1.1.7)解

曲线计算的全导数 \dot{V} 为负定, 则系统的未扰运动渐近稳定。

定理三: 若能构造可微正定、半正定或不定函数 $V(x)$, 使得沿扰动方程(1.1.7)解曲线计算的全导数 \dot{V} 为正定, 则系统的未扰运动不稳定。

可采用几何方法对以上定理作不严格但直观的证明, 严格的数学证明可参阅附录一。设扰动变量为二维, $x = (x_1, x_2)$ 。在 (x_1, x_2, V) 三维空间内作正定的函数曲面 Σ 。此曲面在原点处与 (x_1, x_2) 平面相切。以原点为中心, 在 (x_1, x_2) 相平面内作半径为 ϵ 的圆 S_ϵ 。过 S_ϵ 作柱面与 Σ 交于 S_1 , 过 S_1 曲线的最低点作平面 $V = \text{const}$ 与 Σ 相交于 S_2 , S_2 在相平面上的投影 S_3 是与 S_ϵ 相切的闭曲线, 选择此闭曲线的内切圆为 S_δ (图 1.2)。若 V 沿扰动方程(1.1.7)解曲线计算的全导数 \dot{V} 为半负定或等于零, 则从 S_δ 内出发的任意相点 P 在 Σ 上的对应点 P' 的运动不可能上行而必局限于 S_2 曲线的下方, 因此从 S_δ 内出发的每一条扰动方程相轨迹均不能越出 S_ϵ 。根据李雅普诺夫的定义一, 未扰运动稳定。若 \dot{V} 为负定, 则 P' 的运动必沿 Σ 曲面下行至最低点, 相平面内相应的 P 点向原点趋近。根据李雅普诺夫的定义二, 未扰运动渐近稳定。若 V 不定而 \dot{V} 为正定, 则在 $V > 0$ 区域内出发的 P' 的运动必沿 Σ 曲面上行, 相平面内的 P 点相应地不断远离原点而达到任意指定的 S_ϵ 的边界 (图 1.3)。根据李雅普诺夫的定义三, 未扰运动不稳定。

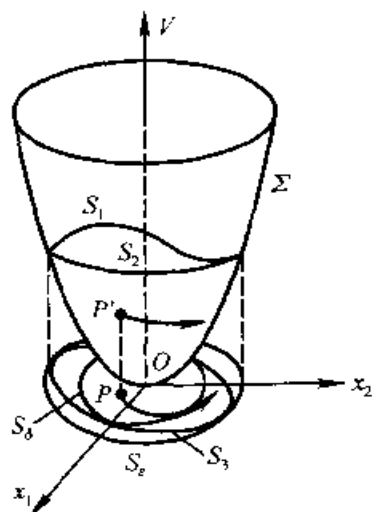


图 1.2 李雅普诺夫定理一、二的几何解释

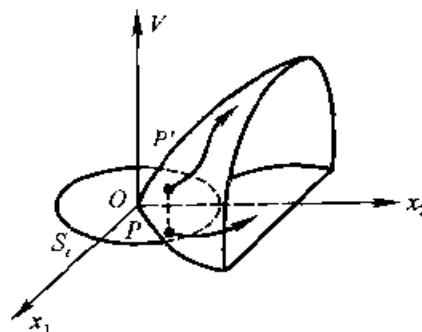


图 1.3 李雅普诺夫定理三的几何解释

作用力仅与位置有关的系统称为保守系统。作为李雅普诺夫直接方法的实际应用,讨论保守系统的平衡稳定性问题。选择保守系统的总机械能 $T + V$ 为李雅普诺夫函数,由于保守系统的机械能守恒,任何扰动运动对应的 $T + V$ 均保持常数,其沿扰动方程解曲线的全导数必等于零。任何约束为定常的系统,其动能 T 均为广义速度的正定函数。将平衡位置作为势能零点,则势能 V 在平衡位置取孤立极小值时, V 必为广义坐标的正定二次型。因此 $T + V$ 为包含坐标和速度的全部扰动变量的正定函数。根据李雅普诺夫的定理一,平衡位置稳定。从而证明了判断保守系统平衡稳定性的拉格朗日定理:

定理: 若保守系统的势能在平衡状态处有孤立极小值,则平衡状态稳定。

对于一般的非自治系统(1.1.5),也有相应的结论,读者可参阅文献[43]第223~236页或文献[60]第16~30页。

例 1.1-1 用李雅普诺夫直接方法判断以下系统未扰运动的零解稳定性:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_1^2 x_2 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

解: 选择正定的李雅普诺夫函数

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad (b)$$

计算 V 沿方程(a)解曲线的全导数,得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 \\ &= 2x_1(x_2 + x_1 x_2^2) + 2x_2(-x_1 - x_1^2 x_2) = 0 \end{aligned} \quad (c)$$

由于 \dot{V} 等于零,系统的未扰运动为稳定。

例 1.1-2 用李雅普诺夫直接方法判断以下系统未扰运动的稳定性:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

解: 选择正定的李雅普诺夫函数

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad (b)$$

计算 V 沿方程(a)解曲线的全导数,得到

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 \\ &= 2x_1[x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)] + 2x_2[-x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)] \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2)^2\end{aligned}\quad (c)$$

由于 \dot{V} 为负定,系统的未扰运动为渐近稳定。

例 1.1-3 用李雅普诺夫直接方法判断以下系统未扰运动的稳定性:

$$\left. \begin{aligned}\dot{x}_1 &= a^2 x_1 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -b^2 x_2 + x_1^2\end{aligned} \right\} \quad (a)$$

解: 选择不定的李雅普诺夫函数

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 \quad (b)$$

计算 V 沿方程(a)解曲线的全导数,得到

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = 2x_1(a^2 x_1 + x_1 x_2) - 2x_2(-b^2 x_2 + x_1^2) \\ &= 2(a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2)\end{aligned}\quad (c)$$

由于 \dot{V} 为正定,系统的未扰运动为不稳定。

1.1.4 线性系统的稳定性准则

由于线性常系数常微分方程组的数学理论已发展得十分完善,因此将复杂的非线性系统以近似的线性系统代替,是工程中经常采用的处理方法。包含 n 个状态变量的自治系统的动力学方程有以下普遍形式:

$$\dot{x}_j = X_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1.8)$$

或写为矩阵形式:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) \quad (1.1.9)$$

其中 n 维列阵 $\mathbf{x} = (x_j)$ 为稳态运动的扰动,函数列阵 $\mathbf{X} = (X_j)$ 不显含时间 t 。当扰动足够微小时,将扰动方程(1.1.9)的右边展成泰勒级数,略去二次以上的项,得到线性方程组,即原系统的一次近似方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.1.10)$$

其中 $n \times n$ 系数矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 为在 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处函数 \mathbf{X} 相对变量 \mathbf{x} 的雅可比

(C.G.J. Jacobi)矩阵,

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right|_{x=0} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1.11)$$

设方程(1.1.9)的解为

$$x = B e^{\lambda t} \quad (1.1.12)$$

其中 $B = (B_j)$ 为 n 维常值列阵, 代入方程(1.1.10), 得到

$$(A - \lambda E)B = 0 \quad (1.1.13)$$

B 有非零解的充分必要条件为系数行列式等于零,

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (1.1.14)$$

展开后得到 λ 的 n 次代数方程, 即矩阵 A 的本征方程。 λ 为本征方程的根, 即矩阵 A 的本征值。设共有 m 个不同的本征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 每个根的重数分别为 n_1, n_2, \dots, n_m , 显然有 $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ 。

作非奇异变换,

$$x = Ty \quad (1.1.15)$$

将上式代入方程(1.1.10), 并左乘 T^{-1} , 化为柯西正则型方程

$$\dot{y} = Jy, \quad J = T^{-1}AT \quad (1.1.16)$$

其中 $y = (y_j)$ 为变换后的状态变量。适当选择 T 使变换后的 J 成为若当标准型, 即由子矩阵 $J_k (k = 1, 2, \dots, m)$ 排成的对角型分块矩阵

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & J_m \end{bmatrix} \quad (1.1.17)$$

$n_k \times n_k$ 子矩阵 $J_k (k = 1, 2, \dots, m)$ 为与各本征值 λ_k 对应的若当块, 其对角线上所有元素均为 λ_k , 左下方次对角线上所有元素均为 1, 其余元素为零,

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & & 0 \\ 1 & \lambda_k & \\ & 1 & \ddots \\ 0 & & \ddots & 1 & \lambda_k \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (1.1.18)$$

由于是相似变换,矩阵 J 与 A 有相同的本征值。有以下几种情形:

(1) 设 A 有 n 个不同的单根, J 为对角阵。方程(1.1.10)有基本解:

$$x_j = e^{\lambda_j t} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1.19)$$

方程(1.1.10)的通解可由基本解(1.1.19)的线性组合构成。

(2) 设 A 有重本征值 λ_k , 重数为 n_k , 则方程(1.1.10)的基本解有以下成分:

$$x_k = f_k(t) e^{\lambda_k t} \quad (1.1.20)$$

其中 $f_k(t)$ 是 t 的 $n_k - 1$ 次代数多项式。

线性方程组(1.1.10)的零解稳定性取决于本征值的实部符号。根据以上分析结果可以归纳为以下定理:

定理一: 若所有本征值的实部均为负, 则线性方程的零解渐近稳定。

定理二: 若至少有一本征值的实部为正, 则线性方程的零解不稳定。具有正实部本征值的数目称为不稳定性。

定理三: 若存在零实部的本征值, 其余根的实部为负, 且零实部根为单根, 则线性方程的零解稳定, 但非渐近稳定。若为重根, 则零解不稳定。

1.1.5 李雅普诺夫一次近似理论

以上在线性方程(1.1.10)的推导过程中, 由于将高次项略去, 已完全不同于原方程(1.1.9)。因此, 线性系统的稳定性准则只适用于一次近似方程。李雅普诺夫证明, 在一定条件下, 可以根据一次近似方程的稳定性推断原方程的稳定性。以下不加证明地叙述李雅普诺夫提出的几条定理, 其证明过程可参阅文献[43]第 91~95 页或文献[60]第 86~90 页。

定理一: 若一次近似方程的所有本征值实部均为负, 则原方程的零解渐近稳定。

定理二: 若一次近似方程至少有一本征值实部为正, 则原方程的零解不稳定。

定理三: 若一次近似方程存在零实部的本征值, 其余根的实部为负, 则不能判断原方程的零解的稳定性。

例 1.1-4 试分析带阻尼单摆平衡状态的稳定性。

解: 设单摆的质量为 m , 摆长为 l , 粘性阻尼系数为 c , 相对垂直轴的偏角为 φ (图 1.4), 动力学方程为

$$ml^2 \ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0$$

或

$$\ddot{\varphi} + 2\zeta\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0^2\sin\varphi = 0 \quad (a)$$

其中 $2\zeta\omega_0 = c/ml^2$, $\omega_0^2 = g/l$ 。方程(a)的一次近似方程为

$$\ddot{\varphi} + 2\zeta\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \quad (b)$$

此线性系统的本征方程和本征值为

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \omega_0(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \quad (c)$$

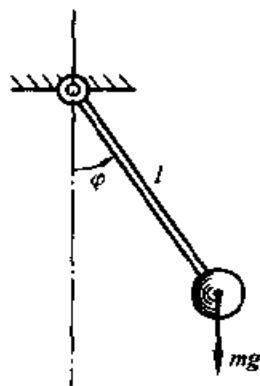


图 1.4 单摆

在任何情况下,本征值的实部均为负,因此统性方程

(b)的零解渐近稳定。根据李雅普诺夫一次近似理论的定理一,原非线性系统(a)的零解亦渐近稳定。即带阻尼单摆的平衡为渐近稳定。

若单摆无阻尼,令 $\zeta=0$,则本征值为纯虚根,

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \quad (d)$$

线性方程(b)的零解稳定。但根据李雅普诺夫一次近似理论的定理三,不能据此判断原非线性方程的零解稳定性。

例 1.1-5 试分析上例的单摆倒立平衡的稳定性。

解: 倒置单摆的动力学方程为

$$\ddot{\varphi} + 2\zeta\omega_0\dot{\varphi} - \omega_0^2\sin\varphi = 0$$

其一次近似方程的本征方程和本征值为

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda - \omega_0^2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \omega_0(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 + 1})$$

本征值存在正实部,根据李雅普诺夫一次近似理论的定理二,一次近似方程和原方程的零解均不稳定。即倒置单摆的平衡不稳定(图 1.5)。

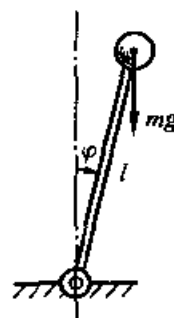


图 1.5 倒置的单摆

例 1.1-6 试讨论非线性系统

$$\dot{x}_1 = -x_2 + ax_1^3, \quad \dot{x}_2 = x_1 + ax_2^3 \quad (a)$$

的零解稳定性。

解: 方程(a)的一次近似方程的本征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \quad (\text{b})$$

解出本征值:

$$\lambda_{1,2} = \pm i \quad (\text{c})$$

一次近似方程的零解为稳定,但原方程(a)零解的稳定性不能由一次近似方程确定。选择正定李雅普诺夫函数

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad (\text{d})$$

计算 V 沿方程(a)解曲线的全导数,得到

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_2 = 2a(x_1^4 + x_2^4) \quad (\text{e})$$

当 $a < 0$ 时, \dot{V} 为负定,原方程的零解为渐近稳定;当 $a = 0$ 时, \dot{V} 恒等于零,零解为稳定;当 $a > 0$ 时, \dot{V} 为正定,零解不稳定。

1.1.6 吸引性、吸引子和吸引盆

李雅普诺夫稳定性描述了振动系统的长期运动性态。吸引性是振动系统长期运动性态的另一种描述。考虑一般非自治系统的情形。设方程(1.1.2)存在特解 $y = y_s(t)$ 满足式(1.1.3),相应的扰动方程为方程(1.1.5)。若给定任意小的正数 ε ,对所有初值 t_0 和一切初扰动满足 $\|x(t_0)\| \leq \delta$ 受扰运动,存在与 ε, t_0 和 $x(t_0)$ 有关的数 T ,使得当 $t > T$ 时有 $\|x(t)\| < \varepsilon$,则称未扰运动 $y_s(t)$ 具有吸引性。若 δ 可取任意大,则未扰运动的吸引性是全局的。

从定义可知,未扰运动具有吸引性时,扰动 $x(t)$ 满足当 $t \rightarrow \infty$ 时均有 $\|x(t)\| \rightarrow 0$ 。因此也可以认为,在李雅普诺夫意义下的渐近稳定性相当于李雅普诺夫意义下的稳定性再加上吸引性。虽然渐近稳定运动既具有稳定性又具有吸引性,但稳定性和吸引性是两个不同的概念。不是渐近稳定的稳定未扰运动不具有吸引性,但具有吸引性的稳态运动可能不具有稳定性。

对于系统(1.1.2),若相空间中闭集 A 满足:以 A 中的点为初始条件的相轨迹仍在 A 内,且以对 A 的某个邻域 U 中的任意点为初始条件的相轨迹经过足够长时间后充分趋近 A ,则称集合 A 为吸引集。一般情况下,吸引集并非具有吸引性的最基本而不可分解的集合。不能进一步分解的吸引集称为吸引子。在系统演化过程中,吸引子上的任意点逐渐

趋近该吸引子上的其他点。吸引子最常见的例子是渐近稳定的平衡点。但也存在其它类型的吸引子,将在后面陆续引入。对于复杂的吸引子,通常很难检验它能否进一步分解,因此一些文献往往将吸引集作为吸引子,虽然严格而论二者是不同的概念。

吸引性和吸引集均是局部的概念,在实际问题中,常需要确定吸引范围。全局吸引性可以保证吸引范围为整个相空间,但在许多情况下,仅需要研究在特定扰动范围内未扰运动的吸引性。为此,引入吸引盆的概念。若相空间 \mathbb{R}^n 中点 y_0 使得当 $t \rightarrow +\infty$ 时从 y_0 出发的相轨迹趋于吸引集 A ,则点 y_0 的全体称为吸引集 A 的吸引盆,也称吸引域。即吸引盆是相轨迹从中出发可渐近趋近于该吸引集的点集。根据微分方程解对初值的连续依赖性,可以证明吸引集的吸引盆是非空开集。根据给定初值的微分方程解的唯一性,可以证明不同吸引集的吸引盆不相交。

借助李雅普诺夫函数,可以估计甚至在一定条件下确定吸引盆。对于低维系统,可以用数值方法确定吸引盆。

例 1.1-7 估计非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - r^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - r^2) \end{cases} \quad (a)$$

零点的吸引盆。

解: 选择李雅普诺夫函数为

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad (b)$$

计算 V 沿方程(a)解曲线的全导数,得到

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2(x_1^2 + x_2^2)[r^2 - (x_1^2 + x_2^2)] \quad (c)$$

只有 $x_1^2 + x_2^2 < r^2$ 时,才有 $\dot{V} < 0$ 。因此,原点的吸引盆包含开圆域 $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < r^2\}$ 。

例 1.1-8 阻尼非线性自由振动系统

$$\ddot{x} + c\dot{x} - x + x^3 = 0 \quad (c > 0) \quad (a)$$

的吸引盆边界。

解: 在相平面 (x, \dot{x}) 上,系统(a)

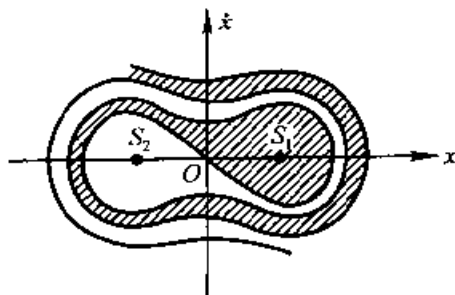


图 1.6 吸引盆

的吸引子是渐近稳定平衡点 $S_1(1,0)$ 和 $S_2(-1,0)$, 不同的初值最终被吸引到这两个平衡点之一, 用数值方法得到吸引盆及其边界如图 1.6 所示。阴影区域为 S_1 的吸引盆, 空白区域为 S_2 的吸引盆, 二者之间为吸引盆边界。

更为复杂的吸引盆边界将在 § 6.3 中继续讨论。

§ 1.2 相平面、相轨迹和奇点

1.2.1 相平面内的相轨迹

讨论一单自由度机械系统的自由振动, 其动力学方程的一般形式为

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \quad (1.2.1)$$

其中函数 $-f(x, \dot{x})$ 表示单位质量物体上作用力的合力, 包括恢复力和阻尼力在内。由于不显含时间变量, 作自由振动的系统必为自治系统。引入新的变量 y 表示速度 \dot{x} ,

$$y = \dot{x} \quad (1.2.2)$$

则系统的运动状态由位置 x 及速度 y 所体现, x 和 y 构成系统的状态变量, 方程(1.2.1)可写为状态变量的一阶微分方程组:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x, y) \quad (1.2.3)$$

设状态变量的初始条件为

$$t = 0: \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (1.2.4)$$

方程(1.2.3)的满足初始条件(1.2.4)的解 $x(t)$ 和 $y(t)$ 完全确定系统的运动过程。以 x 和 y 为直角坐标建立 (x, y) 平面, 称为系统的相平面。与系统的运动状态一一对应的相平面上的点称为系统的相点。系统的运动过程可以用相点在相平面上的移动过程来描述。相点移动的轨迹称为相轨迹。不同初始条件的相轨迹组成相轨迹族。如果不需要确切地了解每个指定时刻的相点位置, 而只要求定性地了解系统在不同初始条件下的运动全貌, 则了解相轨迹族的几何特征就已足够。

将方程组(1.2.3)中两式相除, 消去时间微分 dt 后即得到确定相轨迹族的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x, y)}{y} \quad (1.2.5)$$

给定系统的作用力, 即函数 $f(x, y)$ 指定以后, 方程(1.2.5)确定相平面

(x, y) 内各点的向量场, 构成相轨迹族, 如图 1.7 所示。在上半平面内 $y > 0$ 即 $\dot{x} > 0$, 随着时间的推移, 相点从左到右移动。下半平面内 $y < 0$, 即 $\dot{x} < 0$, 相点从右到左移动。在横坐标轴上各点处有 $y = 0$, 则 $(dy/dx)_{y=0} \rightarrow \infty$, 相轨迹与横坐标轴正交。

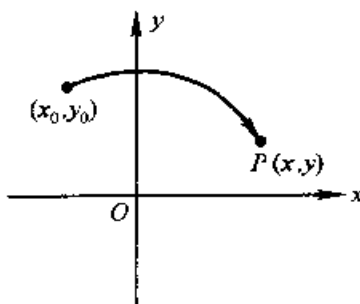


图 1.7 相平面内的相轨迹

1.2.2 相轨迹的奇点

相平面内能使方程(1.2.5)右边分子分母同时为零的特殊点称为相轨迹的奇点。在奇点处 dy/dx 不存在或为不定值。奇点的坐标 (x_s, y_s) 满足方程

$$y_s = 0, \quad f(x_s, y_s) = 0 \quad (1.2.6)$$

因此奇点都分布在横坐标轴上。

根据微分方程解的存在唯一性定理, 若方程(1.2.5)的右端连续, 且满足李普希茨(R. O. S. Lipschitz)条件, 则过 (x, y) 平面上除奇点以外的任何点都通过也只能通过一条积分曲线。奇点处或者无积分曲线通过, 或者有无数条积分曲线通过。由于奇点处 $\dot{x} = \dot{y} = 0$, 因此在奇点处相点的移动速度为零。若相点沿通往奇点的相轨迹运动, 则必须经过无限长时间之后才可能到达奇点。 $\dot{x} = \dot{y} = 0$ 表明系统的速度和加速度均等于零, 奇点的物理意义即系统的平衡状态, 因此也可将奇点称为平衡点。

奇点可以是稳定的也可以是不稳定的, 奇点的稳定性也就是系统平衡的稳定性。根据李雅普诺夫的稳定性定义, 若对于任意的 $\epsilon > 0$, 能够找到确定的 $\delta(\epsilon) > 0$, 使得在 $t = t_0$ 时从以奇点为中心、半径为 δ 的圆内任意点出发的相轨迹在 $t > t_0$ 时保持在以该奇点为中心, 半径为 ϵ 的圆内, 则该奇点为稳定的。反之, 为不稳定。在本章 §1.3 中还将对奇点和稳定性理论作深入讨论。

1.2.3 保守系统的自由振动

1. 势能曲线与奇点

首先用相平面法研究最简单的振动系统, 即作用力仅与位置有关的保守系统。保守系统的动力学方程的一般形式为

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (1.2.7)$$

对应的相轨迹微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{y} \quad (1.2.8)$$

此方程可分离变量积分。设初始条件如式(1.2.4), 积分得到的相轨迹方程为

$$\frac{1}{2}y^2 + V(x) = E, \quad V(x) = \int_0^x f(x)dx \quad (1.2.9)$$

其中 $V(x)$ 为保守系统的势能, 积分常数 $E = (y_0^2/2) + V(x_0)$ 为系统的总机械能。相轨迹方程(1.2.9)实际上就是保守系统的能量积分, 也可写为

$$y = \pm \sqrt{2[E - V(x)]} \quad (1.2.10)$$

分析式(1.2.10), 可以看出保守系统的相轨迹有以下特点(图 1.8):

(1) 相轨迹曲线相对横坐标轴对称。

(2) 势能曲线 $z = V(x)$ 与横坐标轴的平行线 $z = E$ 交点的横坐标 $x = C_1, C_2, C_3$ 处, 相轨迹与横坐标轴相交。

(3) 横坐标轴上与势能曲线 $z = V(x)$ 的驻点对应的点 $x = S_1, S_2, S_3$ 为奇点, 因为它们满足奇点的定义: $y = 0, V'(x) = f(x) = 0$ 。

(4) 在势能取极小值的 $x = S_1$ 处, 设 $E > V(S_1)$, 则在 $x = S_1$ 的某个小领域内都有 $E \geq V(x)$ 。利用式(1.2.10)判断, 在相平面上可得到一围绕奇点 S_1 的封闭相轨迹。当 E 减

小时, 封闭轨迹逐渐收缩, 而当 $E = V(S_1)$ 时, 缩为奇点 S_1 。当 $E < V(S_1)$ 时, 相平面上不存在对应的相轨迹。这种类型的奇点是稳定的, 称为中心。它对应于系统的稳定平衡状态。

(5) 在势能取极大值的点 $x = S_2$ 处, 设 $E < V(S_2)$, 则在区间 $(C_2,$

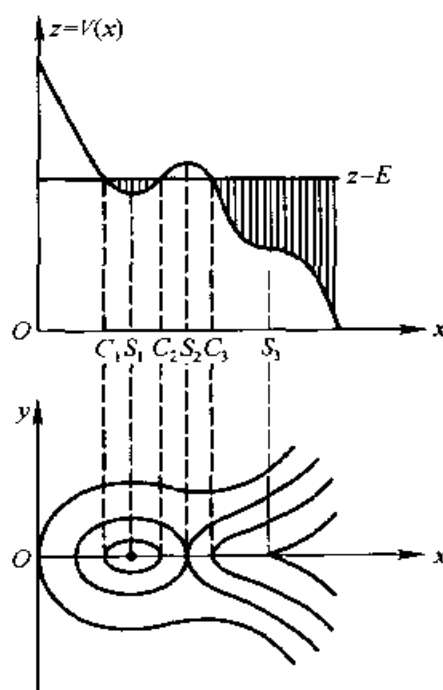


图 1.8 保守系统势能曲线和相轨迹

C_3)内没有对应的相轨迹,而在 $x < C_2$ 及 $x > C_3$ 处得到相轨迹的两个分支,当 E 增大时这两支曲线逐渐靠近,当 $E = V(S_2)$ 时它们在奇点 S_2 处相接触。当 $E > V(S_2)$ 时,则演变为分布在 x 轴的上方和下方的两支曲线。这种类型的奇点是不稳定的,称为鞍点。它对应于系统的不稳定平衡状态。通过鞍点的相轨迹称为分隔线,因为它将相平面分隔成具有不同类型相轨迹的若干区域。

(6) 在势能曲线的拐点 $x = S_3$ 处,相轨迹在 $x < S_3$ 的左半边具有中心性质,在 $x > S_3$ 的右半边具有鞍点性质,相轨迹不封闭。这种奇点为退化的鞍点,也对应于不稳定的平衡状态。

需计算周期运动的周期时,可将式(1.2.2)代入式(1.2.10),分离变量后沿封闭相轨迹积分,得到

$$T = \oint \frac{dx}{\sqrt{2[E - V(x)]}} \quad (1.2.11)$$

一般情况下,周期随初始条件的不同而变化,只有线性保守系统的周期与初始条件无关。

2. 保守系统的平衡稳定性

根据上述保守系统的性质(4),可从几何观点出发,验证关于保守系统平衡稳定性的拉格朗日定理,即保守系统的势能在平衡状态处有孤立极小值为平衡状态稳定的充分条件。

性质(5)和(6)证明了上述定理的逆命题,即保守系统的势能在平衡状态处有非孤立极小值,则平衡状态不稳定。但对于多自由度系统的更普遍情形,此逆命题尚需补充适当的条件方能成立,可参阅文献[43]第151~156页或文献[60]第43~45页。

例 1.2-1 讨论线性保守系统的相轨迹。

解:线性保守系统是最简单的保守系统,其恢复力是位移的线性函数,

$$f(x) = ax \quad (a)$$

对应的势能和相轨迹方程分别为

$$V(x) = \frac{1}{2}ax^2 \quad (b)$$

$$y^2 + ax^2 = 2E \quad (c)$$

作为弹簧恢复力,系数 α 应为正值,则相轨迹方程(c)为椭圆族,奇点为中心。表明系统的自由振动为简谐振动(图 1.9a)。令式(c)中 $y=0, x=A, \dot{x}=\omega_0^2$, ω_0 为线性系统的角频率,解得的振幅 $A=\sqrt{2E}/\omega_0$ 取决于积分常数 E ,由初始条件确定。将式(b)代入积分(1.2.11),算出的周期 T 与振幅无关,证明了线性系统存在等时性。

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (d)$$

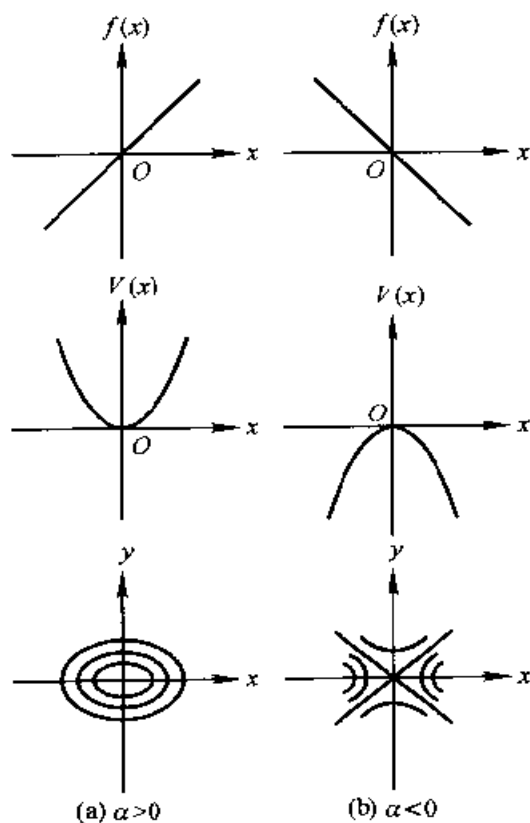


图 1.9 线性保守系统的相轨迹

若式(a)中 α 取负号,则恢复力变为排斥力,称为负刚度系统。其相轨迹为双曲线族,奇点为鞍点,平衡状态不稳定(图 1.9b)。

例 1.2-2 讨论带非线性弹簧的保守系统的相轨迹。

解: 设系统的恢复力为坐标的非线性函数,

$$f(x) = \alpha x + \epsilon x^3 \quad (a)$$

只考虑 $\alpha > 0$ 情形,则 $\epsilon > 0$ 为硬弹簧, $\epsilon < 0$ 为软弹簧(图 1.10)。势能和

相轨迹方程分别为

$$V(x) = \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}\epsilon x^4 \quad (b)$$

$$y^2 + ax^2 + \frac{1}{2}\epsilon x^4 = 2E \quad (c)$$

对应的相轨迹见图 1.11, 可看出与硬弹簧对应的解都是周期解, 系统的平衡状态总是稳定。软弹簧仅当能量较小时才有周期解, 能量大到一定程度时系统失去稳定。受上述非线性弹簧作用的系统的动力学方程为

$$\ddot{x} + ax + \epsilon x^3 = 0 \quad (d)$$

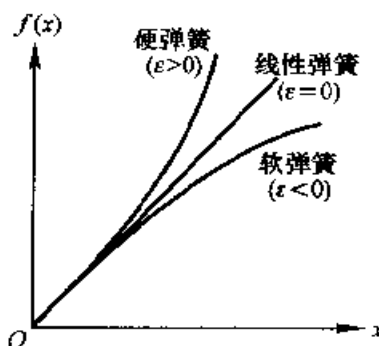


图 1.10 非线性弹簧的恢复力与位移关系

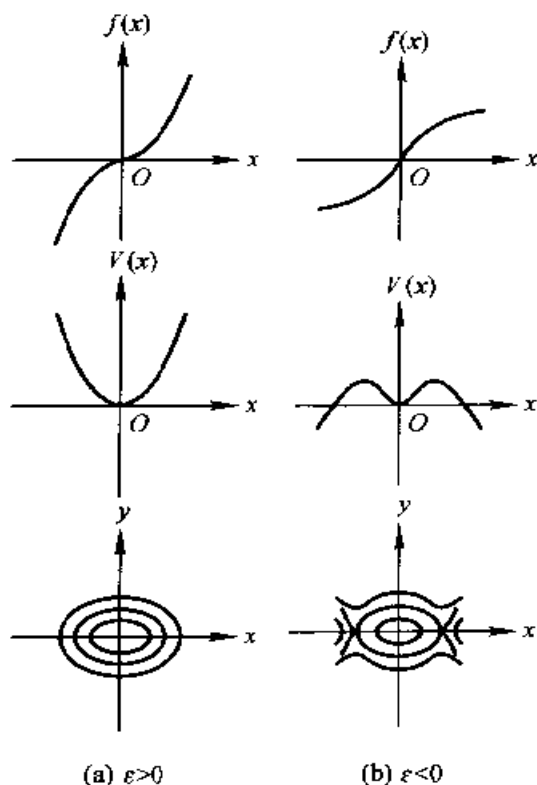


图 1.11 带非线性弹簧保守系统的相轨迹

这类方程受周期激励的情形是达芬于 1918 年首先研究的, 因此将方程 (d) 称为达芬方程。

例 1.2-3 讨论单摆大幅度运动的相轨迹。

解: 忽略例 1.1-4 中单摆动力学方程 (a) 的阻尼项, 其非线性恢复

力为

$$f(\varphi) = -\frac{g}{l} \sin \varphi \quad (\text{a})$$

势能和相轨迹方程分别为

$$V(\varphi) = \frac{g}{l}(1 - \cos \varphi) \quad (\text{b})$$

$$y^2 + \frac{2g}{l}(1 - \cos \varphi) = 2E \quad (\text{c})$$

当偏角较小时, $\sin \varphi \approx \varphi - (\varphi^3/6)$, 因此单摆相当于一种软弹簧, 不同点在于: 相平面上有无数个中心 $\varphi = \pm 2k\pi$ 和鞍点 $\varphi = \pm(2k+1)\pi$ ($k=0, 1, \dots$) (图 1.12)。由于转角 φ 的周期性, $\varphi \pm 2k\pi$ 代表空间中的同一位置。因此可以只取包含在二直线 $\varphi = \pi$ 和 $\varphi = -\pi$ 之间的带域, 使两条边线互相粘合卷成一个柱面, 称为相柱面。在此柱面上, 中心和鞍点各只有一个。过鞍点的分隔线分隔出两类拓扑性质不同的封闭曲线: 一类可在柱面上缩为一点, 另一类则不能 (图 1.13)。它们对应于两类性质不同的周期运动: 前者对应于单摆在平衡位置附近的摆动, 后者对应于单摆绕悬挂点朝同一方向的旋转。

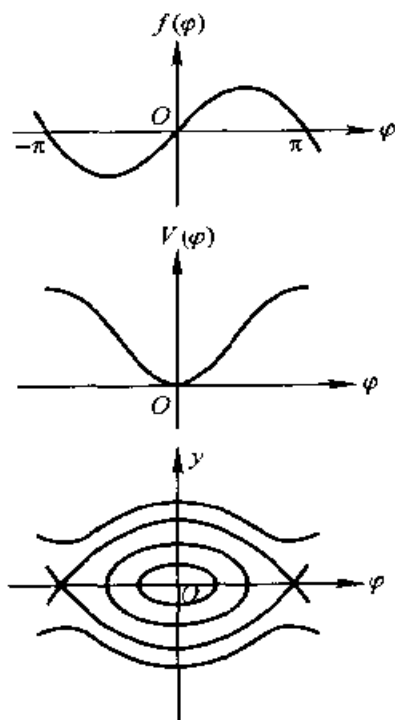


图 1.12 单摆的相轨迹

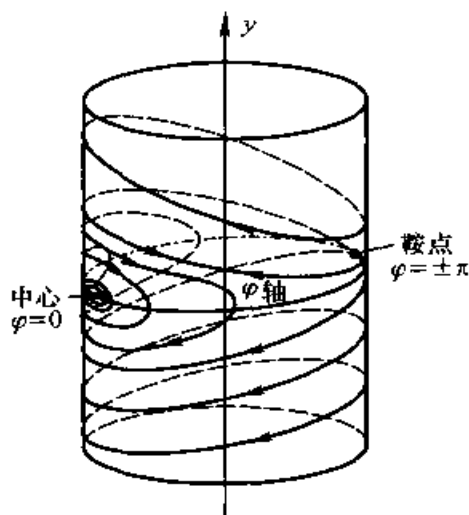


图 1.13 相柱面上单摆的相轨迹

令式(c)中 $y = 0$, $\varphi = A$, 导出 $E = (g/l)(1 - \cos A)$, 代入式(1.2.11)计算得到的摆动周期 T 是振幅 A 的函数,

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^A \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos A}} \quad (d)$$

可见单摆其实不具有等时性, 它的周期随振幅而改变。伽里略于 1581 年关于单摆等时性的发现只是小振幅情形的近似现象, 惠更斯于 1674 年关于大幅度摆动的单摆偏离等时性的发现为人类对非线性振动现象的最早记载。

3. 分段线性系统

分段线性系统是一类特殊的非线性振动系统, 其恢复力 $f(x)$ 为 x 的分段线性函数。以图 1.14a 所示的系统为例, 其恢复力 $f(x)$ 是与位移 x 方向相反的常值力 F , 可写为

$$f(x) = F \operatorname{sgn} x \quad (1.2.12)$$

这类最简单的分段线性恢复力常见于自动控制系统, 称为邦邦控制。将式(1.2.12)代入式(1.2.9), (1.2.10)计算, 其相轨迹由左右两半平面内的抛物线族构成(图 1.14b)。若 $F = 0$, 则抛物线退化为与 x 轴平行的直线族, 表示无恢复力时物体的匀速直线运动。

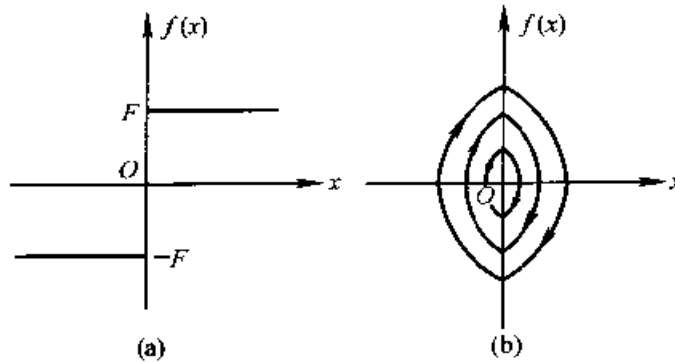


图 1.14 邦邦控制的恢复力和相轨迹

前面已说明, 具有线性恢复力的保守系统的相轨迹为椭圆族。因此对于更复杂的分段线性系统, 其相轨迹可由直线、抛物线和椭圆拼接形成。如图 1.15 所示的各种典型的分段线性恢复力, 所拼接形成的相轨迹曲线见图 1.16。在实际工程问题中, 图 1.15 中的图 a, b 相当于有不灵敏区存在, 图 c 相当于有饱和区存在, 图 d 相当于带间隙的多弹簧系统。

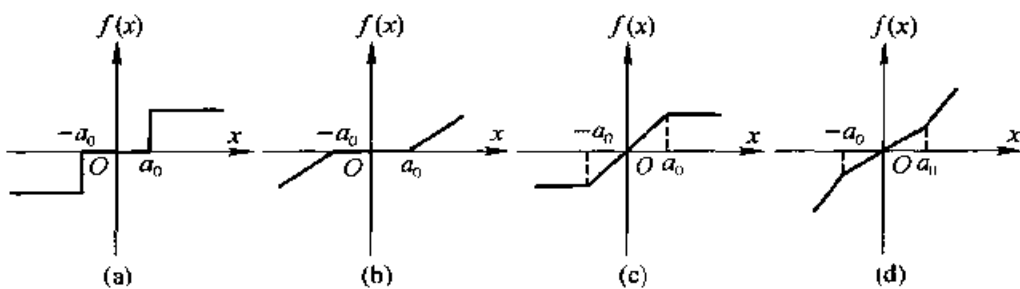


图 1.15 分段线性的恢复力

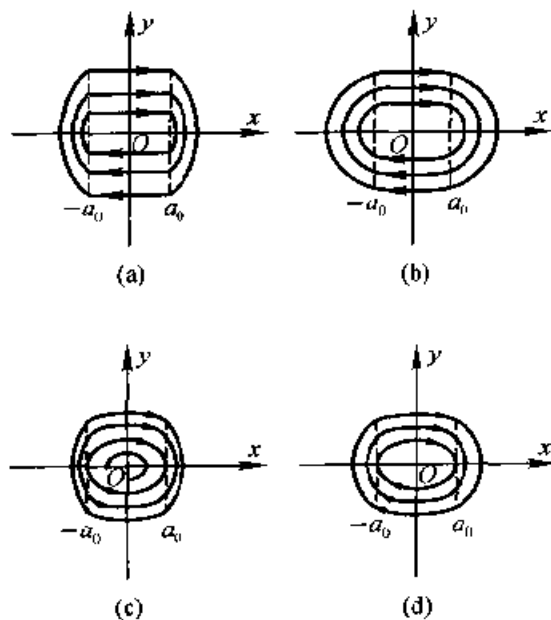


图 1.16 分段线性系统的相轨迹

1.2.4 静态分岔

设所研究的保守系统的力场依赖于某个参数 μ , 运动方程写为

$$\ddot{x} + f(x, \mu) = 0 \quad (1.2.13)$$

势能为

$$V(x, \mu) = \int_0^x f(x, \mu) dx \quad (1.2.14)$$

参数 μ 变化时, 相轨迹随之变化。若 μ 经过某个临界值时, 相轨迹的拓扑性质即奇点的个数和类型产生突变, 则此临界值称为相轨迹的分岔点,

μ 称为分岔参数。这种相轨迹拓扑性质随参数变化发生突变的现象称为分岔。

相轨迹的奇点由以下方程确定：

$$f(x_s, \mu) = 0 \quad (1.2.15)$$

方程(1.2.15)在 (x_s, μ) 平面上所确定的曲线将此平面分隔成两个区域, 分别对应于 $f(x_s, \mu) > 0$ 和 $f(x_s, \mu) < 0$, 如图 1.17 所示。图中以阴影线表示 $f(x_s, \mu) > 0$ 的区域, 对于任一给定的参数 μ_0 , 奇点的位置可由直线 $\mu = \mu_0$ 与曲线 $f(x_s, \mu) = 0$ 的交点 1, 2, 3 的横坐标 x_{s1}, x_{s2}, x_{s3} 确定。当 x 从小于 x_{s1} 经过 x_{s1} 变为大于 x_{s1} 时, $f(x_s, \mu)$ 从正值变为负值, 因而有

$$f'(x_s, \mu_0) < 0 \quad \text{即} \quad V_1''(x_s, \mu_0) < 0 \quad (1.2.16)$$

表明势能 $V(x, \mu_0)$ 在 $x = x_{s1}$ 处取极大值, 奇点为鞍点。同样奇点 $x = x_{s3}$ 也是鞍点。至于 $x = x_{s2}$ 则有

$$f'(x_s, \mu_0) > 0 \quad \text{即} \quad V_2''(x_s, \mu_0) > 0 \quad (1.2.17)$$

因此势能 $V(x, \mu_0)$ 在 $x = x_{s2}$ 处取极小值, 奇点为中心。从而导出庞加莱证明的以下定理:

定理: 如果区域 $f(x_s, \mu) > 0$ 位于曲线 $f(x_s, \mu) = 0$ 的上方, 则平衡位置稳定, 奇点为中心。如果位于 $f(x_s, \mu) = 0$ 的下方, 则平衡位置不稳定, 奇点为鞍点。

图 1.17 中的稳定及不稳定位置分别以实线及虚线表示。曲线上 $d\mu/dx_s$ 为零或取不定值所对应的点 $\mu = \mu_1, \mu_2, \mu_3$ 都具有临界性质, 因为当 μ 经过这些点时, 奇点的个数和类型都发生突变, 因此 μ_1, μ_2, μ_3 就是相轨迹的分岔点。若 $f(x, \mu)$ 为 x 的线性函数, 则不存在分岔点, 所以分岔现象只发生于非线性系统。

例 1.2-4 讨论非线性弹簧的平衡位置与稳定性与刚度的关系。

解: 将例 1.2-2 的式(a)中的 ϵ 以 $\mu\alpha$ 代替, $\mu = \epsilon/\alpha$, 写为

$$f(x, \mu) = \alpha x(1 + \mu x^2) \quad (a)$$

代入式(1.2.15)确定奇点位置, 得到 $x_{s1} = 0$ 。对于 $\mu < 0$ 的软弹簧情形,

还存在另外两个奇点：

$$x_{2,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\mu}} \quad (\text{b})$$

在图 1.18 作出的 (μ, x_s) 曲线上标出中心和鞍点。右半平面为硬弹簧，只有一个不变形状态 $(x_s=0)$ 为中心。左半平面除不变形状态之外，增加两个奇点为鞍点，分岔点为 $\mu=0$ 。

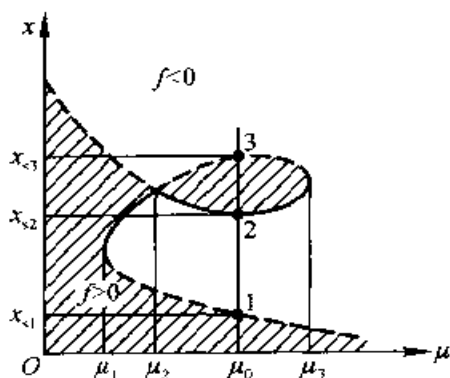


图 1.17 奇点位置与参数 μ 的关系曲线

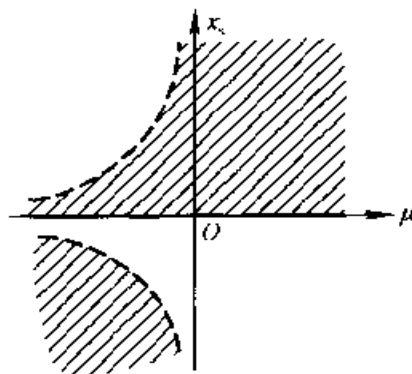


图 1.18 非线性弹簧的静态分岔

例 1.2-5 设长为 l ，质量为 m 的单摆悬挂在旋转轴上，轴以角速度 ω 匀速旋转，摆相对垂直轴的偏角为 x ，讨论摆的平衡位置及稳定性与转速的关系(图 1.19)。

解：列写摆相对悬挂点的动量矩定理：

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x (\mu - \cos x) = 0 \quad (\text{a})$$

其中 $\mu = g/(\omega^2 l)$ 。利用式(1.2.15)确定奇点位置，

$$f(x_s, \mu) = \omega^2 \sin x_s (\mu - \cos x_s) \quad (\text{b})$$

解出

$$x_{s1,2} = 0, \pm \pi, \quad x_{s3} = \arccos \mu \quad (\text{c})$$

x_{s3} 仅存在于 $\mu < 1$ 的情形，在图 1.20 的 (μ, x_s) 曲线上标出中心和鞍点，找出分岔点为 $\mu = 1$ 。所对应的转速为临界转速：

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (\text{d})$$

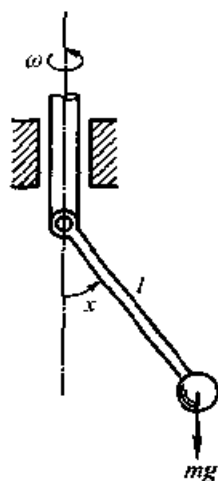


图 1.19 挂在旋转轴上的单摆

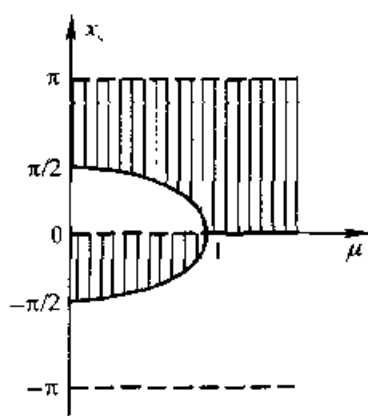


图 1.20 旋转轴上单摆的静态分岔

当 $\mu < 1$ 即转速超过临界转速 ω_{cr} 时, 摆的垂直平衡状态变得不稳定。无限提高转速, 令 $\mu \rightarrow 0$, 则摆的稳定平衡位置趋近于水平位置。

例 1.2-6 设弹性杆的简化模型为两个质量为 m 长度为 l 的均质刚性细杆 AC 和 BC 在点 C 处用铰链连接而成的机构(图 1.21)。杆的抗弯刚度以刚度系数为 k 的螺圈弹簧代替。设杆在两端轴向压力作用下产生偏角 x , 试从动力学观点讨论压杆的稳定性与载荷的关系。

解: 由上下杆的对称性推知, 铰支座 A, B 处的水平约束力为零, 点 C 处的水平约束力亦必为零, 轴向约束力为 F_N , 对上杆列写相对点 A 的动量矩定理, 得到

$$\frac{1}{3} ml^2 \ddot{x} + M - F_N l \sin x = 0 \quad (a)$$

令上式中 $F_N = F$, $M = kx$, $\sin x \approx x - x^3/6$, 化为

$$\ddot{x} + \alpha x \left(\mu - 1 + \frac{x^2}{6} \right) = 0 \quad (b)$$

其中

$$\alpha = \frac{3F}{ml}, \quad \mu = \frac{k}{Fl} \quad (c)$$

利用式(1.2.15)确定奇点位置, 得到

$$f(x_s, \mu) = \alpha x_s \left(\mu - 1 + \frac{x_s^2}{6} \right) = 0 \quad (d)$$

解出

$$x_{s1} = 0, \quad x_{s2,3} = \pm \sqrt{6(1-\mu)} \quad (e)$$

在图 1.22 作出的 (μ, x_s) 曲线上标出中心和鞍点, 可找出分岔点为 $\mu = 1$, 所对应的载荷为临界载荷:

$$F_{cr} = \frac{k}{l} \quad (f)$$

当 $\mu < 1$, 即载荷超过 F_{cr} 时, 压杆的垂直平衡位置失去稳定。

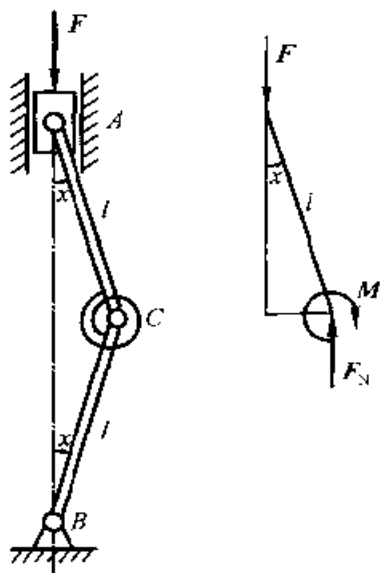


图 1.21 压杆的简化模型

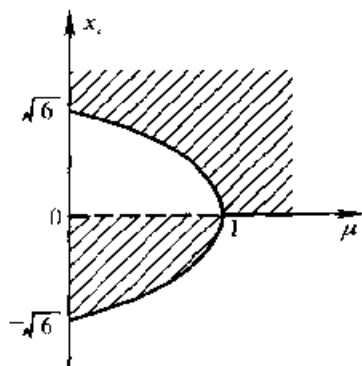


图 1.22 压杆的静态分岔

分岔现象是最早研究的非线性系统的典型特征之一。本节只讨论了平衡点的分岔, 也称为静态分岔。在第二、三章中还将讨论系统运动状态随参数变化而发生的突变, 属于动态分岔问题。关于分岔问题的普遍规律将在第五章中作系统的论述。

1.2.5 相轨迹的作图法

1. 等倾线法

对于给定的相轨迹微分方程(1.2.5), 可以用作图方法画出相轨迹。最简单的作图法为等倾线法。令方程(1.2.5)的右边等于常数 C , 得到 (x, y) 相平面内以 C 为参数的曲线族

$$f(x, y) + Cy = 0 \quad (1.2.18)$$

称为相轨迹的等倾线族。族内每一曲线上的所有点所对应的由方程

(1.2.5)确定的向量场都指向同一方向。例如线性保守系统的等倾线族为过原点的射线族,

$$\omega_0^2 x + Cy = 0 \quad (1.2.19)$$

利用等倾线族的辅助,不难看出相轨迹是以原点为中心的椭圆族(见图1.23)。

2. 列纳法

另一种作图方法称为列纳(A. Liénard)法,它只适用于线性恢复力的特殊情形。适当选择单位使弹簧刚度系数为1,设单位质量的阻尼力为 $-\dot{y}$,则有 $f(x, y) = x + \dot{y}$ 。相轨迹微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + \dot{y}}{y} \quad (1.2.20)$$

在平面上作辅助曲线

$$x = -\dot{y} \quad (1.2.21)$$

此辅助曲线即上述零斜率等倾线,过相点 $P(x, y)$ 作 x 轴的平行线与辅助曲线交于点 R ,过点 R 作 y 轴的平行线与 x 轴交于点 S ,连接 PS ,将向量 \overrightarrow{PS} 逆时针旋转 90° 以后的方向就是方程(1.2.20)确定的相轨迹切线方向(图1.24)。要证明此结论只要引入 $\theta = \angle PSR$,则有

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \tan(-\theta) = -\frac{PR}{RS} \\ &= -\frac{x + \dot{y}}{y} \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

仍以线性保守系统为例,辅助曲线与 y 轴重合,过点 P 的相轨迹是以 O 为圆心 PO 为半径的圆。

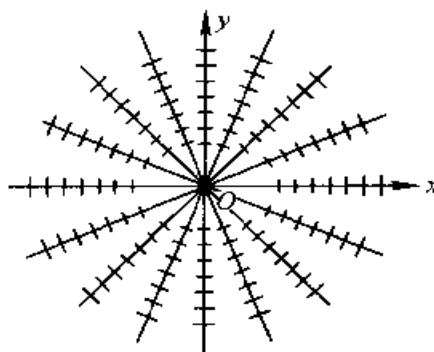


图 1.23 相平面内线性保守系统的等倾线族

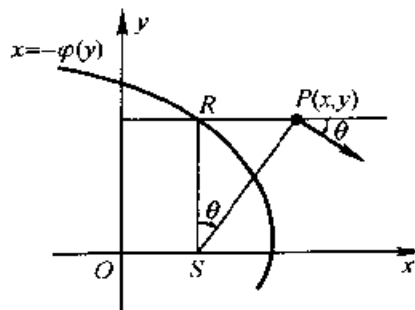


图 1.24 相轨迹的列纳作图法

1.2.6 耗散系统的自由振动

1. 粘性阻尼

运动过程伴随能量耗散的机械系统称为耗散系统,如带有粘性阻尼或干摩擦的系统。先讨论粘性阻尼,设单位质量物体上作用的恢复力和阻尼力分别为 $-\alpha x$ 和 $-c\dot{x}$,则有

$$f(x, y) = \alpha x + cy \quad (1.2.23)$$

利用等倾线法作相轨迹。将上式代入式(1.2.18),得到的等倾线族也是过原点的射线族:

$$\alpha x + (c + C)y = 0 \quad (1.2.24)$$

与式(1.2.19)比较,零斜率等倾线从 y 轴移至第二、四象限。 c 较小时相轨迹是朝原点趋近的螺线,它围绕奇点 $(0,0)$ 无穷尽地转动但始终达不到奇点位置,这类奇点称为稳定焦点(图1.25a)。系统的运动为衰减振动。当 c 较大时,相轨迹尚未完成绕奇点转动一周即接近奇点,成为直接通往奇点的射线,但由于相点在奇点处移动速度为零,因此需经过无限长时间后才能到达奇点。这类奇点称为稳定结点(图1.25b)。系统的运动为衰减的非往复运动。

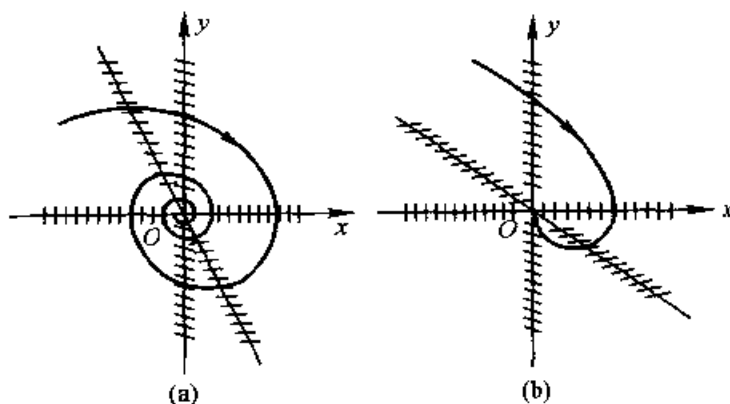


图 1.25 稳定焦点与结点

也可将式(1.2.23)代入相轨迹微分方程(1.2.5),得到

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha x}{y} - c \quad (1.2.25)$$

与线性保守系统的相轨迹微分方程比较,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha x}{y} \quad (1.2.26)$$

可看出二者的区别在于相平面上同一点处的相轨迹斜率相差一项 $-c$,

在图 1.23 的基础上可以估计相轨迹不断从能级较高的椭圆进入能级较低的椭圆,朝原点方向趋近(图 1.26)。

耗散系统的 c 必须为正数。若 c 为负值,则意味着系统的总机械能不仅没有耗散,相反,不断从外界取得能量。这种特殊情况称为负阻尼。负阻尼系统的平衡状态不稳定,相轨迹为不断向外扩展的螺线或射线。若利用等倾线法作图,则零斜率等倾线出现在第一、三象限。这类奇点称为不稳定焦点或不稳定结点(图 1.27)。

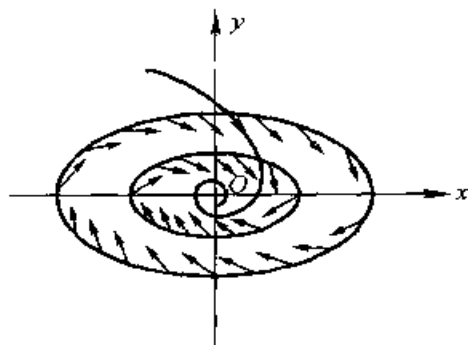


图 1.26 稳定焦点的形成

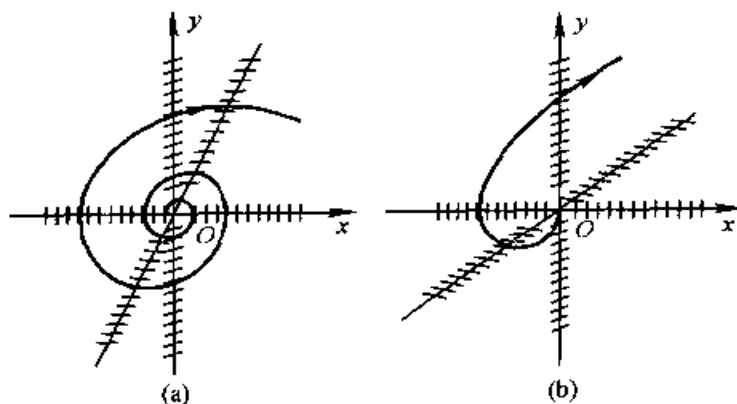


图 1.27 不稳定焦点与结点

2. 干摩擦

物体在粗糙平面上滑动时,单位质量物体上作用的摩擦力 $-\varphi(y)$ 的简化规律为

$$\varphi(y) = F \operatorname{sgn} y \quad (1.2.27)$$

如图 1.28 所示。其中动摩擦力为常值 F ,指向滑动相反方向。作为简化模型, F 等于最大静摩擦力。根据库仑摩擦定律, F 与接触面处物体间的正压力 F_N 成正比,即

$$F = f F_N \quad (1.2.28)$$

比例系数 f 为静摩擦因数。讨论受干摩擦力作用的质量-弹簧系统,若弹簧为线性,且弹簧刚度系数为 1,则可利用列纳作图法。先作出辅助曲线(1.2.21),即

$$x = -F \operatorname{sgn} y \quad (1.2.29)$$

相轨迹在上半相平面内是以 $(-F, 0)$ 为圆心的圆, 在下半相平面内是以 $(F, 0)$ 为圆心的圆。若相点的起始位置为 $(a_0, 0)$, 下一次与 x 轴相交的位置为 $(-a_1, 0)$, 再下一次为 $(a_2, 0)$ 等, 则从图 1.29 可看出振幅的递减规律:

$$a_1 \approx a_0 - 2F, \quad a_2 \approx a_1 - 2F, \quad \dots, \quad a_n \approx a_{n-1} - 2F \quad (1.2.30)$$

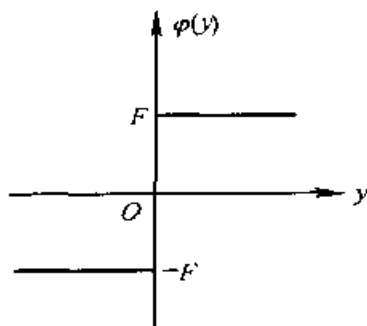


图 1.28 干摩擦力与相对速度关系曲线

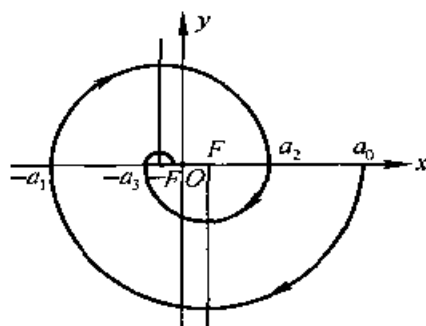


图 1.29 有干摩擦的质量-弹簧系统的相轨迹

相轨迹为由半径递减的半圆组成的螺线, 向原点方向趋近。直到 $a_n < F$ 时, 相点停止运动。这时弹簧恢复力小于最大静摩擦力而保持平衡。因此 x 轴上区间 $(-F, F)$ 内的每个点都是奇点而构成干摩擦的死区。相点在死区的终止位置完全是随遇的。由于粘性阻尼不存在死区, 因此在测量仪表中加入润滑油, 将干摩擦转化为粘性阻尼, 即可消除零点不准现象。

§ 1.3 奇点的分类

1.3.1 平面动力学系统

在上一节中已利用相平面方法分析了单自由度系统的自由振动, 用相轨迹的奇点表示系统的平衡状态。根据奇点的不同类型可以定性地描述平衡状态附近的运动性态。本节讨论一般情形下奇点的分类问题。

设动力学系统的状态方程的普遍形式为

$$\dot{x}_1 = P(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2) \quad (1.3.1)$$

含两个状态变量的动力学系统称为平面动力学系统, 或简称平面系统。方程的右项不显含时间 t 而称为平面自治系统。例如单自由度系统的自由振动就是平面自治系统。将 (1.3.1) 两式相除, 得到与时间变量无关的一阶微分方程:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{Q(x_1, x_2)}{P(x_1, x_2)} \quad (1.3.2)$$

相轨迹上的奇点 x_{1s}, x_{2s} 是以下方程的解:

$$P(x_{1s}, x_{2s}) = 0, \quad Q(x_{1s}, x_{2s}) = 0 \quad (1.3.3)$$

不失一般性, 将坐标原点移至奇点处, 则 $x_{1s} = x_{2s} = 0$ 。将函数 $P(x_1, x_2)$ 和 $Q(x_1, x_2)$ 在奇点 $(0, 0)$ 附近展开为泰勒(B. Taylor)级数, 得到

$$\left. \begin{aligned} P(x_1, x_2) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \epsilon_1(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \epsilon_2(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \quad (1.3.4)$$

其中 ϵ_1 和 ϵ_2 为 x_1 和 x_2 的二次以上的项, $a_{ij} (i, j = 1, 2)$ 为函数 P 和 Q 关于变量 x_1 和 x_2 的雅可比(C. G. J. Jacobi)矩阵 A 的元素,

$$A = \frac{\partial(P, Q)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (1.3.5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} \right)_s, & a_{12} &= \left(\frac{\partial P}{\partial x_2} \right)_s \\ a_{21} &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} \right)_s, & a_{22} &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x_2} \right)_s \end{aligned} \right\} \quad (1.3.6)$$

下角标的 s 表示在奇点处的值。引入列阵 $x = (x_1 \ x_2)^T$, 此线性化方程可写为

$$\dot{x} = Ax \quad (1.3.7)$$

作非奇异线性变换,

$$x = Tu \quad (1.3.8)$$

将上式代入方程(1.3.7)并左乘 T^{-1} , 化为柯西(A. L. Cauchy)型正则方程

$$\dot{u} = Ju, \quad J = T^{-1}AT \quad (1.3.9)$$

其中 $u = (u_1 \ u_2)^T$ 为变换后的状态变量。适当选择 T 可使变换后的 J 成为若当(C. Jordan)标准型, 矩阵 J 与 A 有相同的本征值。

1.3.2 线性系统的奇点类型

分别对以下不同情形讨论矩阵 J 的本征值与奇点的关系:

1. J 有不等实本征值 λ_1, λ_2

J 为对角阵:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (1.3.10)$$

方程(1.3.9)的投影式为

$$\dot{u}_1 = \lambda_1 u_1, \quad \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2 \quad (1.3.11)$$

此两方程的通解为

$$u_1 = u_{10} e^{\lambda_1 t}, \quad u_2 = u_{20} e^{\lambda_2 t} \quad (1.3.12)$$

将(1.3.11)的两方程相除,得到

$$\frac{du_2}{du_1} = \alpha \frac{u_2}{u_1} \quad (1.3.13)$$

其中参数 $\alpha = \lambda_2/\lambda_1$ 。方程(1.3.13)可分离变量积分得到相轨迹方程

$$u_2 = C u_1^\alpha \quad (1.3.14)$$

相轨迹为指数曲线族。 $\alpha < 0$ 即 λ_1, λ_2 异号时,奇点为鞍点(图 1.30a)。

$\alpha > 0$ 即 λ_1, λ_2 同号时,奇点为结点。结点的稳定性可利用式(1.3.12)判

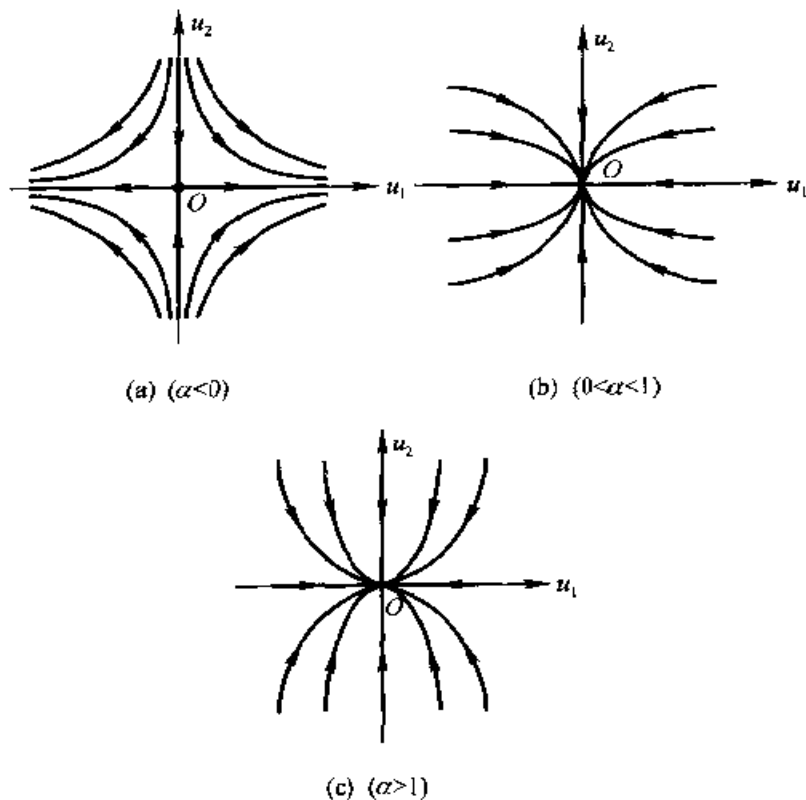


图 1.30 鞍点与稳定结点

断, λ_1, λ_2 同为负号时为稳定结点(图 1.30b, c), λ_1, λ_2 同为正号时为不稳定结点。

2. J 有二重实本征值 $\lambda_1 = \lambda_2$

J 为非对角阵:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad (1.3.15)$$

方程(1.3.9)的投影式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1 &= \lambda_1 u_1 \\ \dot{u}_2 &= u_1 + \lambda_1 u_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.16)$$

此方程组的通解为

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_{10} e^{\lambda_1 t} \\ u_2 &= (u_{20} + u_{10} t) e^{\lambda_1 t} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.17)$$

将(1.3.16)的两方程相除, 得到

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{u_1 + \lambda_1 u_2}{\lambda_1 u_1} \quad (1.3.18)$$

若 $\lambda_1 = 0$, 则相轨迹与 u_2 轴重合。若 $\lambda_1 \neq 0$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时 u_2/u_1 无限增大, $du_2/du_1 \rightarrow \infty$, 即所有的相轨迹都趋向与 u_2 轴相切, 奇点为结点。结点的稳定性用式(1.3.17)判断, $\lambda_1 < 0$ 时稳定(图 1.31), $\lambda_1 > 0$ 时不稳定。

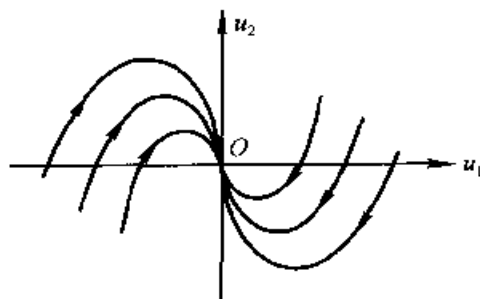


图 1.31 稳定结点

3. J 有共轭复本征值, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

矩阵 J 为

$$J = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} \quad (1.3.19)$$

将 u_1, u_2 变换为

$$u_1 = re^{i\varphi}, \quad u_2 = re^{-i\varphi} \quad (1.3.20)$$

代入方程(1.3.9), 得到

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1 &= (\dot{r} + ir\dot{\varphi})e^{i\varphi} = (\alpha + i\beta)re^{i\varphi} \\ \dot{u}_2 &= (\dot{r} - ir\dot{\varphi})e^{-i\varphi} = (\alpha - i\beta)re^{-i\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.21)$$

从上式导出 r, φ 的微分方程

$$\dot{r} = \alpha r, \quad \dot{\varphi} = \beta \quad (1.3.22)$$

此两方程的通解为

$$r = r_0 e^{\alpha t} \quad (1.3.23a)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \beta t \quad (1.3.23b)$$

相轨迹为围绕奇点的螺线, 奇点为焦点。焦点的稳定性利用式(1.3.23a)判断, $\alpha < 0$ 时为稳定焦点(图 1.32), $\alpha > 0$ 时为不稳定焦点。对于 $\alpha = 0$ 的特殊情形, 相轨迹转化为椭圆, 奇点为中心(图 1.33)。

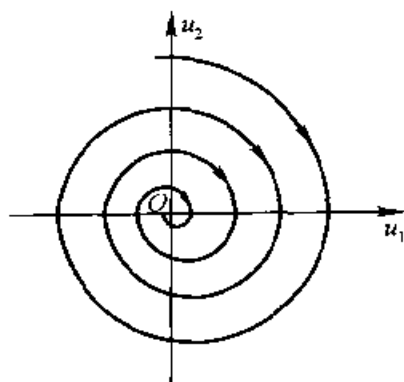


图 1.32 稳定焦点

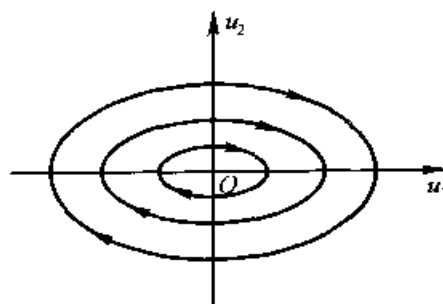


图 1.33 中心

1.3.3 奇点的分类准则

线性变换后的变量 u 与变换前的变量 x 为线性同构, 它们的奇点类型完全相同。根据以上分析结果, 奇点的类型取决于矩阵 A 的本征值。将 A 的本征方程展开, 得到

$$|A - \lambda E| = \lambda^2 - p\lambda + q = 0 \quad (1.3.24)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} p &= \operatorname{tr} \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} \\ q &= \det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.25)$$

方程(1.3.24)的本征值为

$$\lambda_{1,2} = (p \pm \sqrt{\Delta})/2 \quad (1.3.26)$$

其中

$$\Delta = p^2 - 4q \quad (1.3.27)$$

奇点的不同类型由参数 p 和 Δ 完全确定:

(1) $\Delta > 0$: $\lambda_{1,2}$ 为不等实根。若 $q > 0$, 则 λ_1 与 λ_2 同号, 奇点为结点, $p < 0$ 稳定, $p > 0$ 不稳定。若 $q < 0$, 则 λ_1 与 λ_2 异号, 奇点为鞍点。若 $q = 0$, 即 \mathbf{A} 为奇异情形, 则 $\lambda_{1,2}$ 出现零根, 相轨迹为平行直线族。奇点为退化情形。

(2) $\Delta = 0$: $\lambda_{1,2}$ 为重根。奇点为结点。 $p < 0$ 稳定, $p > 0$ 不稳定。

(3) $\Delta < 0$: $\lambda_{1,2}$ 为共轭复根。若 $p = 0$, 奇点为中心。若 $p \neq 0$, 奇点为焦点, $p < 0$ 稳定, $p > 0$ 不稳定。

可归纳出以下结论:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \geq 0 \\ \Delta < 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} q > 0 \text{ 结点} \\ q < 0 \text{ 鞍点} \\ p = 0 \text{ 中心} \\ p \neq 0 \text{ 焦点} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} p \leq 0 \text{ 稳定} \\ p > 0 \text{ 不稳定} \end{array} \right.$$

利用此分类准则在 (p, q) 参数平面内可划分出不同类型的奇点(图 1.34)。

\mathbf{A} 的本征值实部不为零时, 称相应的奇点为双曲奇点; 本征值实部为零时, 称相应的奇点为非双曲奇点。线性系统的双曲奇点只能是非中心型奇点。

以上对线性系统奇点类型的讨论有助于分析非线性系统(1.3.2)的奇点类型。庞加莱证明, 当 \mathbf{A} 为非奇异, 即 $\det \mathbf{A} \neq 0$ 时, 将式(1.3.4)中的二阶以上小量 ε_1 和 ε_2 略去后的线性化方程与原方程有相同类型奇点。惟一的例外是当 $\Delta < 0$ 时, $p = 0$ 条件对区

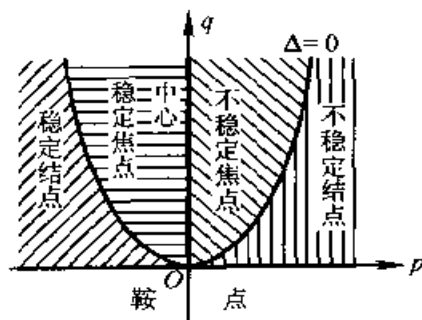


图 1.34 参数平面内的奇点类型

别中心和焦点不够充分。当 $\det \mathbf{A} = 0$, 线性系统的奇点为退化情形时, 关于原系统的奇点类型必须考察 ε_1 和 ε_2 的高阶项才能判断, 可能有新的奇点类型出现。

例 1.3-1 判断单摆的奇点类型。

解: 忽略例 1.1-4 中单摆的阻尼力, 其动力学方程为

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (\text{a})$$

令 $y = \dot{\varphi}$, 将方程化为

$$\frac{dy}{d\varphi} = - \frac{(g/l) \sin \varphi}{y} \quad (\text{b})$$

奇点为

$$S_1 \begin{cases} y_s = 0 \\ \varphi_s = 0 \end{cases}, \quad S_2 \begin{cases} y_s = 0 \\ \varphi_s = \pi \end{cases} \quad (\text{c})$$

令 $x = \varphi - \varphi_s$, 方程(b)线性化为

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{(g/l) \cos \varphi_s x}{y} \quad (\text{d})$$

列出方程(d)的雅可比矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(g/l) \cos \varphi_s & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{e})$$

得到

$$p = 0, \quad q = \frac{g}{l} \cos \varphi_s, \quad \Delta = - \frac{4g}{l} \cos \varphi_s$$

奇点类型见表 1.1。

表 1.1 奇点类型

奇点	p	q	Δ	奇点类型
S_1	0	+	-	中心
S_2	0	-	+	鞍点

单摆运动的相轨迹见图 1.11 或图 1.12。

例 1.3-2 分析滑翔机的运动。设机翼面积很大, 空气阻力远小于

升力而略去;飞机的转动惯量不大,而尾翼的稳定力矩很大。攻角保持为零(图 1.35)。

解:设飞机的质量为 m ,质心速度为 v ,纵轴相对水平面的倾角为 θ ,升力 F_L 为

$$F_L = c_L S \frac{\rho v^2}{2} \quad (a)$$

其中 c_L 为升力系数, S 为特征面积, ρ 为空气密度。列出飞机质心运动的动力学方程为

$$\left. \begin{aligned} m\dot{v} &= -mg \sin \theta \\ mv\dot{\theta} &= -mg \cos \theta + c_L S \frac{\rho v^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

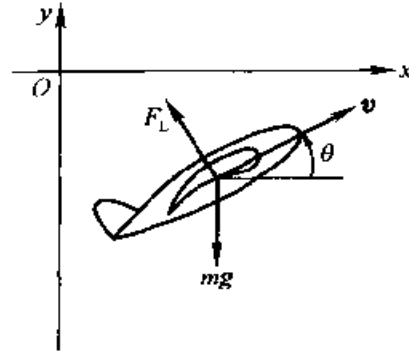


图 1.35 滑翔机

将 θ, v 作为决定飞机运动状态的状态变量,则 (θ, v) 相平面内的相轨迹微分方程为

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{v \sin \theta}{\cos \theta - (v/v_0)^2} \quad (c)$$

其中常数 $v_0 = \sqrt{2mg/(c_L S \rho)}$ 。令 $y = v/v_0$, 作变量置换,此方程化为

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{-y \sin \theta}{y^2 - \cos \theta} \quad (d)$$

有 3 个奇点:

$$S_1 \begin{cases} \theta_s = 0 \\ y_s = 1 \end{cases}, \quad S_2 \begin{cases} \theta_s = \pi/2 \\ y_s = 0 \end{cases}, \quad S_3 \begin{cases} \theta_s = -\pi/2 \\ y_s = 0 \end{cases} \quad (e)$$

奇点 S_1 对应于飞机作速度为 v_0 的水平匀速飞行,奇点 S_2 和 S_3 对应于飞机直立且速度为零的瞬时失速状态。列出方程(d)的雅可比矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sin \theta_s & 2y_s \\ -y_s \cos \theta_s & -\sin \theta_s \end{bmatrix} \quad (f)$$

得到

$$p = 0, \quad q = 2y_s^2 \cos \theta_s - \sin^2 \theta_s, \quad \Delta = 4(\sin^2 \theta_s - 2y_s^2 \cos \theta_s) \quad (g)$$

奇点类型见表 1.2。

表 1.2 奇点类型

奇点	p	q	Δ	奇点类型
S_1	0	+	-	中心
S_2	0	-	+	鞍点
S_3	0	-	+	鞍点

实际上方程(d)为全微分方程,可积分得到相轨迹方程:

$$\frac{1}{3}y^3 - y\cos\theta = \text{const} \quad (\text{h})$$

相轨迹族如图 1.36 所示。可看出过鞍点的分隔线将相平面划分为两个不同区域。初扰动很小时滑翔机的水平匀速飞行为稳定的稳态运动。但对于太大的初扰动,若相点越出由分隔线划分的粗实线所围区域,则 θ 单调增加,水平飞行转变为不稳定的翻筋斗运动。

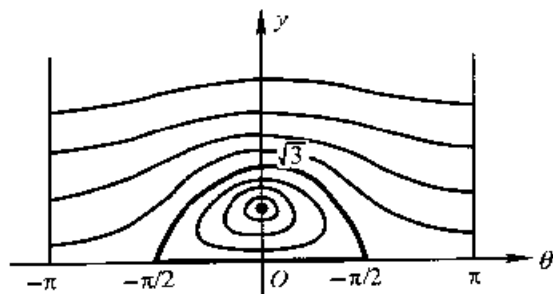


图 1.36 滑翔机运动的相轨迹

§ 1.4 极 限 环

1.4.1 瑞利方程和范德波尔方程

以上分析表明,相平面内的封闭相轨迹是对系统的周期运动的定性描述。稳定的中心奇点周围的密集的闭轨迹族对应于单自由度保守系统的自由振动。在无数封闭相轨迹曲线中,实际运动所对应的相轨迹由初始运动状态确定。但实践中也存在一类特殊的振动系统,其运动微分方程的解在相平面上所确定的相轨迹是一条孤立的封闭曲线,它所对应的周期运动由系统的物理参数惟一确定,与初始运动状态无关。这种孤立的封闭相轨迹称为极限环。自激振动是一种与极限环相对应的周期运

动。本节讨论极限环的一般性质,在第三章中将对自激振动系统的研究。

作为能导致极限环出现的典型例子,讨论以下类型的微分方程:

$$\ddot{x} - \epsilon \dot{x}(1 - \delta \dot{x}^2) + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.4.1)$$

这是瑞利(J. W. S. Rayleigh)进行声学研究时分析过的方程,故称为**瑞利方程**。将方程(1.4.1)的各项对 t 求导,将 \dot{x} 作为新的变量仍记为 x ,参数 3δ 以 δ 代替,化为

$$\ddot{x} - \epsilon \dot{x}(1 - \delta \dot{x}^2) + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.4.2)$$

这种与瑞利方程等价的微分方程是范德波尔在研究电子管振荡器电路时导出的,故称为**范德波尔方程**。关于瑞利方程或范德波尔方程能导致极限环出现的原因,可作以下定性的解释。

方程(1.4.1)或(1.4.2)的第二项相当于耗散系统的阻尼项。当 x 或 \dot{x} 较小时,此阻尼项为负值,但对于 x 或 \dot{x} 的足够大的值,此阻尼项变为正值。因此范德波尔方程对于小幅度运动为负阻尼,对于大幅度运动为正阻尼。利用变量 $y = \dot{x}$,方程(1.4.1)可化为一阶自治的微分方程。不失一般性令 $\omega_0^2 = 1$,得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\epsilon y(1 - \delta y^2) - x}{y} \quad (1.4.3)$$

利用列纳作图法,先作出零斜率等倾线,即图 1.37 中的虚线,

$$x = \epsilon y(1 - \delta y^2) \quad (1.4.4)$$

可看出在原点附近阻尼为负值,零斜率发生于第一、三象限;在远离原点处,阻尼为正值,零斜率发生于第二、四象限。因此,与原点重合的奇点为不稳定焦点,附近的相点必向外发散。在远离原点处,相点的运动规律接近于稳定焦点周围的相轨迹而向内收敛。可以预计,这两类方向相反的相轨迹之间必有一稳定极限环存在(图 1.37)。

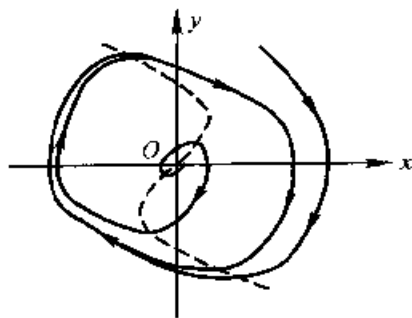


图 1.37 范德波尔方程的极限环

1.4.2 闭轨迹的稳定性

关于闭轨迹的稳定性可给出以下定义:

定义: 若给定任意小的正数 ϵ , 存在正数 δ , 使得在初始时刻 $t = t_0$

时,从闭轨迹 Γ 的任一侧距离 δ 处出现的受扰相轨迹上的点在 $t > t_0$ 时总留在闭轨迹 Γ 的 ϵ 距离以内,则称未扰闭轨迹为稳定。反之不稳定。若未扰闭轨迹稳定,且受扰轨迹与未扰闭轨迹的距离当 $t \rightarrow \infty$ 时趋近于零,则称无扰闭轨迹为渐近稳定(图 1.38)。



图 1.38 闭轨迹稳定性的几何解释

上述定义只要求未扰的闭轨迹与受扰后的轨迹之间充分接近,而不要求每个瞬时未扰的相点与受扰的相点位置接近。因此,不同于前面叙述的李雅普诺夫意义下的稳定性,称为轨道稳定性。由于是庞加莱首先提出,也称为庞加莱意义下的稳定性。

极限环的稳定性也可利用点映射概念说明。在相平面内作线段 L 使在任何位置均不与相轨迹相切,称为无切点线段。从 L 上任一点 P 出发的相轨迹若再一次与线段 L 相交,则交点 P' 称为 P 的后继点(图 1.39)。设 P 和 P' 相对于 L 上的参考点 O 的坐标为 s 和 s' ,则 s' 是 s 的函数,称为后继函数,

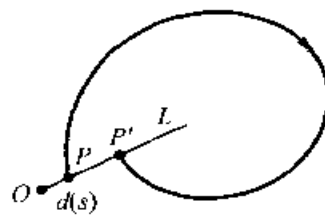


图 1.39 相轨迹上的点映射

$$s' = f(s) \quad (1.4.5)$$

此函数建立起线段 L 上的点 P 与后继点 P' 之间的点映射关系。定义 $d(s) = s' - s$ 为 P 与 P' 的距离,若 $f(s_0) = s_0$ 或 $d(s_0) = 0$,则 s_0 是点映射的不动点,即过该点的相轨迹 Γ 为闭轨迹。若 $d(s_0) = 0$,而 $d'(s_0) \neq 0$,则 Γ 为孤立闭轨迹,即极限环。 $d'(s_0) < 0$ 时 Γ 为稳定极限环, $d'(s_0) > 0$ 时 Γ 为不稳定极限环。极限环也可能出现一侧稳定但另一侧不稳定的情形,称为半稳定极限环。在更普遍的意义下,若 $d^{(i)}(s_0) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$),且 $d^{(k)}(s_0) \neq 0$,则称 Γ 为 k 重极限环。 $k = 1$ 时称为单重极限环。若 k 为奇数,且 $d^{(k)}(s_0) < 0$,则 Γ 稳定; $d^{(k)}(s_0) > 0$ 时, Γ 不稳定。若 k 为偶数,则 Γ 为半稳定。稳定或不稳定的单重极限环也称

为双曲闭轨。

根据上述轨道稳定性的定义可以推知:保守系统的闭轨迹是轨道稳定的,稳定极限环是轨道渐近稳定的。不稳定和半稳定极限环是轨道不稳定的。只有稳定的闭轨迹才是物理上能够实现的周期运动。

例 1.4-1 试确定下列动力学方程描述系统的极限环并讨论稳定性:

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} \dot{x} &= y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= -x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}(1 - x^2 - y^2) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(x^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} &= x + y(x^2 + y^2 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

$$(3) \quad \left. \begin{aligned} \dot{x} &= y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} &= -x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x^2 + y^2 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

解: (1) 作变量置换

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (d)$$

或

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (e)$$

导出

$$x\dot{x} + y\dot{y} = \rho\dot{\rho}, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = \rho^2\dot{\varphi} \quad (f)$$

将式(d)代入式(a)并利用式(e), 导出

$$\dot{\rho} = 1 - \rho^2, \quad \dot{\varphi} = -1 \quad (g)$$

积分得到

$$\rho = \frac{C - e^{-2t}}{C + e^{-2t}}, \quad \varphi = \varphi_0 - t \quad (h)$$

其中 $C = (1 + \rho_0)/(1 - \rho_0)$ 。由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 1$, 因此 $\rho = 1$ 即 $x^2 + y^2 = 1$ 为稳定的极限环。

(2) 将式(d)代入式(b)并利用式(e), 可以导出

$$\dot{\rho} = \rho(\rho^2 - 1), \quad \dot{\varphi} = 1 \quad (i)$$

积分得到

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1 - Ce^{2t}}}, \quad \varphi = \varphi_0 + t \quad (j)$$

其中 $C = (\rho_0^2 - 1)/\rho_0^2$ 。当 $\rho_0 < 1$ 时, $C < 0$, 由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 1$, 相轨线从 $\rho = 1$ 的圆内远离该圆; 当 $\rho_0 > 1$ 时, $C > 0$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 1$, 相轨线从 $\rho = 1$ 的圆外远离该圆。因此, $\rho = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 1$ 为不稳定极限环。

(3) 将式(d)代入式(c)并利用式(e), 可以导出

$$\dot{\rho} = \rho(\rho^2 - 1)^2, \quad \dot{\varphi} = -1 \quad (k)$$

积分得到

$$-\frac{\rho^2}{\rho^2 - 1} e^{1/(\rho^2 - 1)} = Ce^{2t}, \quad \varphi = \varphi_0 - t \quad (l)$$

其中

$$C = \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2 - 1} e^{1/(\rho_0^2 - 1)} \quad (m)$$

当 $\rho_0 < 1$ 时, $C < 0$, 由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 1$, 相轨线从 $\rho = 1$ 的圆内趋近该圆; 当 $\rho_0 > 1$ 时, $C > 0$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 1$, 相轨线从 $\rho = 1$ 的圆外远离该圆。因此, $\rho = 1$ 即 $x^2 + y^2 = 1$ 为半稳定极限环。

1.4.3 闭轨迹存在的必要条件

讨论一般形式的平面自治系统的状态方程:

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) \quad (1.4.6)$$

对应的相轨迹微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (1.4.7)$$

此方程所决定的 (x, y) 相平面的向量场中, 作不经过奇点的封闭曲线 C 。当动点 P 沿曲线 C 逆时针环绕一周回至原处时, 点 P 处的向量与固定坐标轴夹角 θ 的变化为 2π 的整数倍 $2\pi j$ (图 1.40)。整数 j 称为封闭曲线 C 的庞加莱指数, 其数学表达式为

$$j(C) = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\left(\arctan \frac{Q}{P}\right) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{P dQ - Q dP}{P^2 + Q^2} \quad (1.4.8)$$

$j(C)$ 有以下性质:

(1) 若 C 的内部不含奇点, 则 $j = 0$ 。

(2) 若 C 的内部包含一个奇点, 则 j 称为该奇点的奇点指数。中心、焦点、结点的指数 $j = +1$, 鞍点的指数 $j = -1$ 。

(3) 若 C 的内部包含若干个奇点, 则 j 等于各个奇点指数的代数和 (图 1.41)。

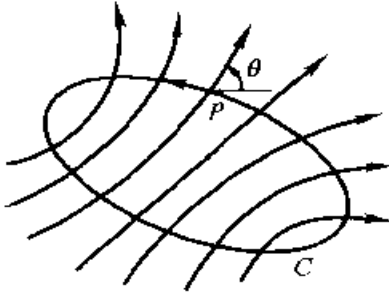


图 1.40 向量场中的闭曲线

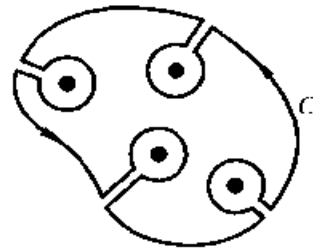


图 1.41 计算多个奇点指数的闭曲线

(4) 若 C 与封闭相轨迹重合, 则 $j = +1$ 。

(5) 若 C 上各点向量都向外或向内。则 $j = +1$ 。

利用上述性质, 可直观地看出包括极限环在内的封闭相轨迹存在的必要条件:

(1) 封闭相轨迹内部至少有一个奇点。

(2) 若只有一个奇点, 则此奇点必须是中心、焦点或结点。

(3) 若有几个奇点, 则奇点指数的代数和为 $+1$, 即鞍点的数目必须比其它奇点的数目少 1。

例 1.4-2 试讨论例 1.2-2 中的软弹簧-质量系统存在闭轨迹的可能性。

解: 设软弹簧-质量系统的动力学方程为

$$\ddot{x} + x - \epsilon x^3 = 0$$

此系统有 3 个奇点: 中心 $S_1(0, 0)$ 和两个鞍点 $S_2(1/\sqrt{3}, 0)$, $S_3(-1/\sqrt{3}, 0)$ 。根据上述闭轨迹与奇点的关系可以判断: 闭轨迹只可能包含 S_1 , 而不可能将 S_2 或 S_3 也包含在内。从图 1.11b 可看出此判断的正确性。

1.4.4 闭轨迹存在的充分条件

有多种判断极限环存在的充分性条件, 其中以下述庞加莱-本迪克生 (I. Bendixon) 定理最为直观。该定理先由庞加莱于 1881 年提出, 后由本迪克生于 1901 年严格证明。

定理：若平面自治系统在环形域 D 的边界上的相轨迹均由外向内（或由内向外）进入 D 域，且 D 域内无奇点，则在 D 域内存在稳定（或不稳定）极限环（图 1.42）。

应用此定理的困难在于如何选择环形域的边界。李雅普诺夫提出一种简单方法，叙述如下：

在相平面内作以原点为中心半径不同的二同心圆围成环形域 D （图 1.43）。将圆周上任意点沿径向的法线 n 与向量场在该点的向量 a 点积。若 $a \cdot n < 0$ ，则向量朝原点方向穿过圆周。若 $a \cdot n > 0$ ，则向量朝相反方向穿过圆周。 $a \cdot n$ 的符号可用 $Px + Qy$ 来判断。根据庞加莱-本迪克生定理，若环形域 D 内无奇点，则 D 域内存在稳定极限环的充分条件为：在内圆周上各点 $Px + Qy > 0$ ，在外圆周上各点 $Px + Qy < 0$ 。 D 域内存在不稳定极限环的充分条件为：在内圆周上各点 $Px + Qy < 0$ ，在外圆周上各点 $Px + Qy > 0$ 。

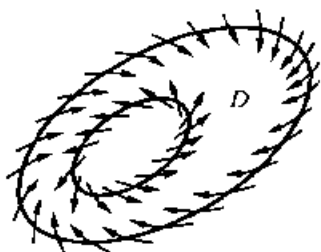


图 1.42 存在极限环的环形域

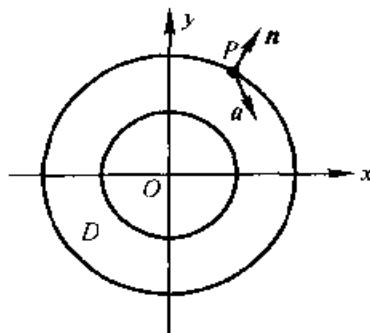


图 1.43 同心圆围成的环形域

例 1.4-3 试用庞加莱-本迪克生定理证明动力学方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y - x(x^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} &= -x - y(x^2 + y^2 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

描述的系统有稳定极限环。

解：此方程只有一个奇点 $x_s = y_s = 0$ ，利用线性化方程的本征值判断此奇点为不稳定焦点或结点，满足极限环存在的必要条件。为证明极限环存在的充分条件也成立，对于 $\delta > 0$ ，作圆周 $C_1: x^2 + y^2 = 1 + \delta$ 和 $C_2: x^2 + y^2 = 1 - \delta$ 围成环形域 D 。圆周上各点满足

$$\left. \begin{aligned} C_1: Px + Qy &= -(x^2 + y^2)(x^2 - y^2 - 1) = (x^2 + y^2)\delta > 0 \\ C_2: Px + Qy &= -(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = -(x^2 + y^2)\delta < 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

根据庞加莱-本迪克生定理, D 域内必存在极限环, 即圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 。

例 1.4-4 试证明范德波尔方程描述的系统有稳定极限环。

解: 将范德波尔方程(1.4.2)中 ω_0 和 δ 均取为 1, 写为一阶方程组形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \epsilon y(1 - x^2) - x \end{cases} \quad (a)$$

此方程只有一个奇点 $x_s = y_s = 0$, 方程(a)的线性化方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \epsilon y - x \end{cases} \quad (b)$$

利用方程(b)的本征值判断, 此奇点为不稳定焦点或结点, 满足极限环存在的必要条件。为证明极限环存在充分性, 先作出方程(a)确定的向量场的水平等倾线

$$y = -\frac{x}{\epsilon(1 - x^2)} \quad (c)$$

它有三个分支, 将其中第二、四象限内的分支 C_1, C_2 作为环形域 D 的部分外边界。此弧上各点的向量场向内进入 D 域。作圆弧 $x^2 + y^2 = 1 + \delta$, 与 C_1, C_2 分别交于点 A 和 A' , 与 $x = \pm 1$ 直线分别交于点 B 和 B' , 也作为 D 域外边界的一部分, 分别记为 C_3, C_4 。圆弧上各点 $|x| > 1$, 满足

$$Px + Qy = \epsilon y^2(1 - x^2) < 0 \quad (d)$$

表明 C_3, C_4 弧上各点的向量亦向内进入 D 域。过点 B 和 B' 作线性化方程的相轨迹弧 BF 和弧 $B'F'$, 分别与 C_2 和 C_1 交于点 F 和 F' 。弧 BF 、弧 $B'F'$ 也组成 D 域的外边界, 分别记为 C_5, C_6 。比较两个方程(a)和(b)的相轨迹斜率,

$$\frac{\epsilon y(1 - x^2) - x}{y} - \frac{\epsilon y}{y} \frac{x}{y} = -\epsilon x^2 < 0 \quad (e)$$

表明 C_5, C_6 弧上各点的向量向内进入 D 域。作圆弧 $x^2 + y^2 = 1 - \delta_1$, 作为 D 域的内边界, 记为 C_7 。弧上各点有

$$Px + Qy = \epsilon y^2(1 - x^2) = \epsilon y^2(y^2 + \delta_1) > 0 \quad (f)$$

表明 C_7 弧上各点均向外进入 D 域。根据庞加莱-本迪克生定理, D 域内必存在极限环(图 1.44)。

根据例 1.4-4 的证明过程,可对庞加莱-本迪克生定理作出以下推论:若平面自治系统在 D 域的边界上的相轨迹由外向内(或由内向外)进入 D 域,且 D 域内有不稳定(或稳定)焦点或结点,此外再无其他奇点,则在 D 域内存在稳定(或不稳定)极限环(图 1.45)。

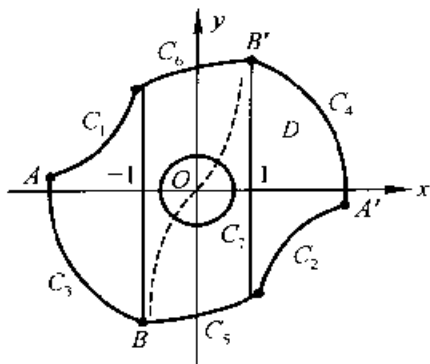


图 1.44 范德波尔方程存在极限环的证明

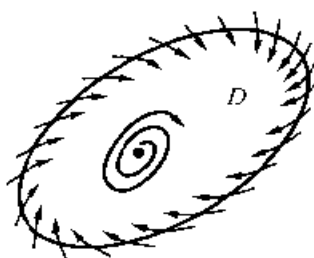


图 1.45 存在极限环的域

1.4.5 闭轨迹不存在条件

除上述极限环存在条件以外,本迪克生还证明了一个闭轨迹不存在条件。

定理: 对于用式(1.4.7)描述的平面自治系统,如果在单连通域 D 内 P, Q 有连续偏导数,且 $\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$ 为常号函数,则在 D 域内必不存在闭轨迹。

证明: 采用反证法。假设 D 域内存在闭轨迹 Γ ,且 D' 为 Γ 包围的域,利用格林(G.Green)公式和方程(1.4.7)导出

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} (P dy - Q dx) = 0 \quad (1.4.9)$$

为保证此等式成立, $\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$ 在 D 域内必须变号,而与定理的前提相矛盾。因此闭轨迹必不存在。

例 1.4-5 试讨论范德波尔方程描述的系统存在极限环的可能性。

解: 令范德波尔方程(1.4.2)中 $\omega_0^2 = 1$,化为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\epsilon y(1 - \delta x^2) - x}{y} \quad (a)$$

导出

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \epsilon(1 - \delta x^2) \quad (\text{b})$$

根据上述闭轨迹不存在定理,在由直线围成的带域 $-1/\sqrt{\delta} < x < 1/\sqrt{\delta}$ 内,和在两个半平面 $x < -1/\sqrt{\delta}$ 和 $x > 1/\sqrt{\delta}$ 内不存在闭轨迹。但不能排除此系统存在与直线 $x = \pm 1/\sqrt{\delta}$ 相交的闭轨迹。此闭轨迹的存在性已在例 1.4-4 中得到证明。

1.4.6 闭轨迹稳定性定理

为判断平面自治系统(1.4.7)的闭轨迹 Γ 的稳定性,庞加莱引入以下参数:

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)_{\Gamma} dt \quad (1.4.10)$$

其中 T 为闭轨迹 Γ 所对应的周期运动的周期。参数 h 称为闭轨迹 Γ 的特征指数。庞加莱证明了以下闭轨迹稳定定理:

定理: 若平面自治系统的闭轨迹 Γ 的特征指数 $h < 0$, 则闭轨迹 Γ 稳定; 若 $h > 0$, 则 Γ 不稳定。

此定理的数学证明在附录二中给出。

例 1.4-6 设平面自治系统的相轨迹微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\epsilon y(1 - x^2 - y^2) - x}{y} \quad (\text{a})$$

试利用庞加莱定理证明此系统的极限环稳定。

解: 此系统存在唯一的奇点 $x_s = y_s = 0$ 。作两个辅助圆:

$$C_1: x^2 + y^2 = \frac{3}{2}, \quad C_2: x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \quad (\text{b})$$

则有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} - \epsilon \quad (\in C_1), \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} + \epsilon \quad (\in C_2) \quad (\text{c})$$

相轨迹进入 C_1 与 C_2 之间的环形域 D (图 1.46), 且在 D 域内无奇点, 根据庞加莱-本迪克生定理, 此系统在 D 域内存在稳定的极限环。

实际上方程(a)存在孤立的周期解:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{d})$$

为利用庞加莱定理证明此周期解的稳定性, 将式(d)写为参变形式:

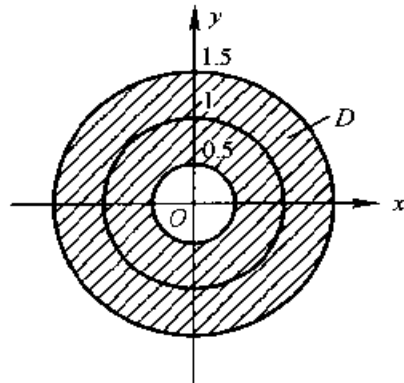
$$x = \cos \omega t, \quad y = \sin \omega t \quad (\text{e})$$

算出

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} &= 2\varepsilon(1 - x^2 - 3y^2) \\ &= -4\varepsilon \sin^2 \omega t \end{aligned} \quad (\text{f})$$

令 $T = 2\pi$, 代入式(1.4.10)计算特征指数 h , 得到

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-4\varepsilon \sin^2 \omega t) d(\omega t) \\ &= -2\varepsilon < 0 \end{aligned}$$

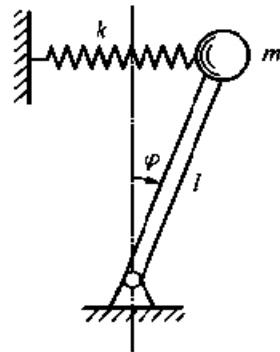


(g) 图 1.46 同心圆围成的环形域

根据庞加莱定理, 此极限环是稳定的。

习 题

1.1 图示弹簧-倒摆系统的摆长为 l , 质量为 m , 在摆的直立位置弹簧无变形。试用李雅普诺夫直接方法讨论为保证倒置平衡状态稳定, 弹簧的刚度系数 k 应满足的条件。



题 1.1 图

1.2 试用李雅普诺夫直接方法判断下列系统零解的稳定性:

- (1) $\dot{x}_1 = mx_2, \dot{x}_2 = -mx_1$;
- (2) $\dot{x}_1 = mx_2 - ax_1^3, \dot{x}_2 = nx_1 - bx_2^3$ (m, n 为正, a, b 同号);
- (3) $\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3, \dot{x}_2 = -x_1 - x_2$;
- (4) $\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + ax_2^3$;
- (5) $\dot{x}_1 = mx_2 + ax_1(x_1^2 + x_2^2), \dot{x}_2 = -mx_1 + ax_2(x_1^2 + x_2^2)$;
- (6) $\dot{x}_1 = -x_2 - x_1(4 - x_1^2 - x_2^2), \dot{x}_2 = x_1 - x_2(4 - x_1^2 - x_2^2)$;
- (7) $\dot{x}_1 = x_2 + x_1x_2^2, \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3$;
- (8) $\dot{x}_1 = x_1 + x_2, \dot{x}_2 = x_1 - x_2^2 \operatorname{sgn} x_2$.

1.3 已知单自由度系统

$$\dot{x}_1 = F(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = G(x_1, x_2)$$

有零解 $(0, 0)$ 。试证明, 若存在常数 a 和 b 使得在 $(0, 0)$ 的邻域有

$$aF(x_1, x_2) + bG(x_1, x_2) > 0$$

则零解为不稳定。

1.4 试利用上题结论证明下列系统的零解不稳定:

(1) $\dot{x}_1 = x_1^2 + x_2^2, \dot{x}_2 = x_1 x_2;$

(2) $\dot{x}_1 = x_1^2 + x_2^2, \dot{x}_2 = x_1 + x_2;$

(3) $\dot{x}_1 = x_1 x_2 + x_2^2, \dot{x}_2 = x_1 \sin x_1.$

1.5 试利用一次近似理论判断下列非线性系统零解的稳定性:

(1) $\dot{x}_1 = x_2 + x_1^2, \dot{x}_2 = x_3 + x_1 x_2, \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_3^2;$

(2) $\dot{x}_1 = e^{x_1} \sin x_2 + \sin x_1 + e^{x_3} - 1, \dot{x}_2 = \sin(x_1 + x_2),$

$\dot{x}_3 = \ln(1 + x_1 + x_3);$

(3) $\dot{x}_1 = ax_1 - x_2 + x_1 x_2^2, \dot{x}_2 = ax_2 - x_3 + x_1 x_2^2,$

$\dot{x}_3 = ax_3 - x_1 + x_1 x_2;$

(4) $\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 - x_3 + x_1^2 \sin x_1, \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + (x_1^2 x_2 + x_3^2) e^{x_1},$

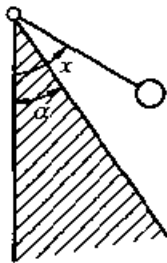
$\dot{x}_3 = x_1 + x_2 - x_3 - (x_2^2 + x_3^2) \cos x_1.$

1.6 一单自由度系统的动力学方程为

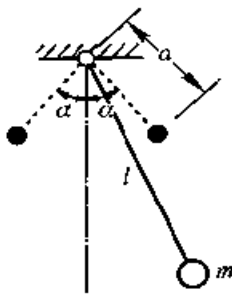
$$\ddot{x} - x + x^3 = 0$$

问该系统是否为保守系统? 试画出 $f(x)$, $V(x)$ 函数曲线和相轨迹曲线族, 并判断奇点的类型。

1.7 图示质量为 m , 摆长为 l 的单摆的运动受倾斜角为 α 的刚性墙约束, 且与墙作完全弹性碰撞。试对 $\alpha > 0, \alpha = 0, \alpha < 0$ 三种情况画出系统的相轨迹曲线, 并讨论当碰撞为非完全弹性时相轨迹的变化趋势。



题 1.7 图



题 1.8 图

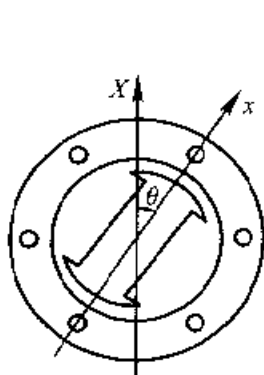
1.8 质量为 m 的质点受长度为 l 的柔索约束在平面内运动, 在偏角 $\pm \alpha$ 与支点距离 a 处受钉子约束如图示。试画出系统的相轨迹曲线。

1.9 同步电机通过三相交流电流产生匀速旋转磁场, 如图示。设转子极轴 x 相对定子磁极轴 X 的偏角为 θ , 转子的转动惯量为 J , 电磁恢复力矩为 $M \sin \theta$, 负载力矩 L 为常数。试分析电机转子的运动与负载的关系。

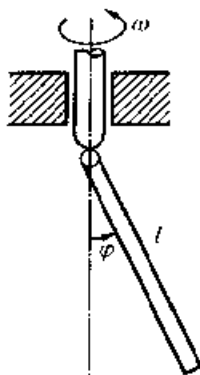
1.10 质量为 m 长度为 l 的均质杆以匀角速度 ω 绕铅垂轴旋转, 如图示。试讨论平衡位置及其稳定性随 ω 的变化。

1.11 质量为 m 的质点受弹簧约束沿半径为 r 的圆环滑动, 如图示。弹簧原长

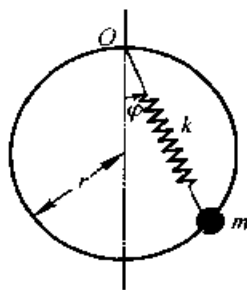
为 l ($l < 2r$), 刚度系数为 k 。试讨论质点平衡位置随 k 的变化。



题 1.9 图



题 1.10 图



题 1.11 图

1.12 弹簧 质量系统在流体介质中受到与速度平方成正比的阻力 $F_d = -C_d \dot{x} |\dot{x}|$ 。试用等倾线法作出零等倾线, 并分析 x 轴和 y 轴上各点的斜率, 从而确定相轨迹的几何特征。

1.13 改用列纳法作出题 1.12 的相轨迹。

1.14 试判断下列平面线性系统奇点的类型:

(1) $\dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_2, \dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2$;

(2) $\dot{x}_1 = 4x_1 - x_2, \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2$;

(3) $\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2$;

(4) $\dot{x}_1 = x_1 - x_2, \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2$;

(5) $\dot{x}_1 = -x_1, \dot{x}_2 = -x_2$;

(6) $\dot{x}_1 = x_1 + 3x_2, \dot{x}_2 = 5x_1 - x_2$;

(7) $\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2, \dot{x}_2 = x_1 - x_2$;

(8) $\dot{x}_1 = x_1 + 3x_2, \dot{x}_2 = 6x_1 - 5x_2$ 。

1.15 试确定下列平面非线性系统的奇点并判断奇点的类型。

(1) $\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - x_2), \dot{x}_2 = \frac{1}{4}x_2(2 - 3x_1 - x_2)$;

(2) $\dot{x}_1 = 9x_1 - 6x_2 + 4x_1x_2 - 5x_1^2, \dot{x}_2 = 6x_1 - 6x_2 - 5x_1x_2 - 4x_2^2$;

(3) $\dot{x}_1 = (x_1 + 1)x_2, \dot{x}_2 = x_1(1 + x_2^3)$;

(4) $\dot{x}_1 = 5x_1^2 + x_2^2 - 5, \dot{x}_2 = x_1x_2 - 2$ 。

1.16 受弹簧约束的带电导线受到由另一根平行且固定的无限长带电导线引起的磁场力的作用, 如图示。设弹簧无变形时固定导线与动导线之间的距离为 a , 弹簧的刚度系数为 k , 动导线的长度为 l , 动导线和定导线的电流分别为 i 和 I , 则动导线的运动微分方程为

$$m\ddot{x} + k\left(x - \frac{\lambda}{a - x}\right) = 0$$

其中 $\lambda = 2Il/k$ 。试确定此非线性系统的奇点及其类型,并画出相轨迹曲线。

1.17 试确定下列平面系统的极限环并判断稳定性:

$$(1) \dot{x}_1 = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2;$$

$$(2) \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1)(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2),$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1)(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2);$$

$$(3) \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_1^2 - x_1x_2^2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + x_1^2x_2 + \frac{2}{3}x_2^2;$$

$$(4) \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)\sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

1.18 试确定平面非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1[a + 2(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)^2] \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2[a + 2(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)^2] \end{cases}$$

的奇点和极限环并判断其稳定性。

1.19 对于平面系统

$$\dot{x}_1 = P(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2)$$

若存在函数 $B(x_1, x_2)$ 使得在单连通区域 D 内有

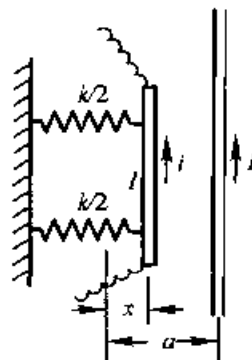
$$\frac{\partial}{\partial x_1}(BP) + \frac{\partial}{\partial x_2}(BQ) \neq 0$$

其中 $P(x_1, x_2)$, $Q(x_1, x_2)$ 和 $B(x_1, x_2)$ 在 D 内有连续偏导数。试证明系统在 D 内无极限环。

1.20 试利用上题结果讨论系统

$$\ddot{x} + (c - c_1\dot{x})\dot{x} + (k - k_1x)x = 0 \quad (c \neq 0)$$

存在极限环的可能性。



题 1.16 图

第二章 非线性振动的 近似解析方法

第一章中叙述的定性分析方法在讨论振动系统的运动性态时,可避免对动力学微分方程求解。但定性分析方法的主要研究对象限于自治系统,而且不能定量地计算运动的时间历程以及频率、振幅等表示振动特性的基本参数。本章对非线性系统作定量研究。由于可求出精确解析解的非线性系统极少,因此除采用数值计算方法以外,只能采用近似解析方法。近似解析方法的研究对象多为弱非线性系统,这类系统的非线性项为小量,因此有可能将非线性因素作为对线性系统的一种摄动,从而在线性系统解的基础上寻求非线性系统的近似解。通常是寻求非线性系统可能存在的周期解。有各种近似解析方法,本章以介绍方法为主,以典型的非线性系统为分析对象,也通过分析展示出非线性系统特有的运动性态。虽然着重讨论单自由度系统,但基本思想也适用于多自由度系统,最后一节分析了多自由度系统的自由振动和受迫振动。

§ 2.1 谐波平衡法

2.1.1 谐波平衡法概述

在各种近似解析方法中,谐波平衡法是概念最明了,使用最简便的近似方法,而且应用范围不仅限于弱非线性系统。其基本思想是将振动系统的激励项和方程的解都展成傅里叶(J. B. J. Fourier)级数。从物理意义考虑,为保证系统的作用力与惯性力的各阶谐波分量自相平衡,必须令动力学方程两端的同阶谐波的系数相等,从而得到包含未知系数的一系列代数方程,以确定待定的傅里叶级数的系数。

讨论以下普遍形式的非线性系统的受迫振动:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F(t) \quad (2.1.1)$$

不失一般性,设 $F(t)$ 为偶函数,且不含常值分量。当实验观测到系统作周期为 $T=2\pi/\omega$ 的周期运动时,可将 $F(t)$ 展成周期为 T 的傅里叶级

数:

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos(n\omega t) \quad (2.1.2)$$

其中

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} F(t) \cos(n\omega t) dt \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.1.3)$$

代入动力学方程(2.1.1),得到

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos(n\omega t) \quad (2.1.4)$$

预计方程(2.1.4)的解也是以频率 ω 周期变化,也可展成傅里叶级数:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)] \quad (2.1.5)$$

将式(2.1.5)代入方程(2.1.4),其中的函数 $f(x, \dot{x})$ 中包含非线性恢复力和阻尼力,通常是 x 和 \dot{x} 的多项式,代入后总能利用三角公式化为各阶谐波的线性式。令左右两边各阶谐波系数相等,可得到包含已知和未知系数的无穷代数方程组。预先假定 $x(t)$ 中所含谐波的个数,即可从有限个方程中解出待定的系数以确定各阶谐波的振幅 a_n ($n = 1, 2, \dots$) 与频率 ω 之间的对应关系。当级数收敛时,谐波频率愈高,振幅愈小,因此实际计算时,可近似地取有限项代替无穷级数。同样方法也可用于自治系统,计算其自由振动频率与振幅的关系。

谐波平衡法的另一种叙述方式称为伽辽金(B. G. Galerkin)法。根据虚功原理,将动力学方程(2.1.1)的各项与虚位移 δx 相乘,得到

$$[\ddot{x} + f(x, \dot{x}) - F(t)]\delta x = 0 \quad (2.1.6)$$

其中的虚位移 δx 可由式(2.1.5)中各阶谐波的振幅变分 δa_n ($n = 1, 2, \dots$) 确定

$$\delta x = \sum_{n=1}^{\infty} \delta a_n \cos(n\omega t - \theta_n) \quad (2.1.7)$$

将式(2.1.2)和(2.1.7)代入方程(2.1.6),此等式应在每个瞬时都成立,但作为一种近似,伽辽金法只要求此等式在每个周期内的平均意义上成立。令各项在周期 T 内取平均值,得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T [\ddot{x} + f(x, \dot{x}) - F(t)] \cos(n\omega t - \theta_n) \delta a_n dt = 0 \quad (2.1.8)$$

由于 δa_n ($n = 1, 2, \dots$) 为独立变分,上式 δa_n 的各个系数应分别为零。利

用三角函数的正交性,即导出与谐波平衡法完全相同的关系式。但伽辽金法也允许利用其它正交函数族进行计算,而限于三角级数。

2.1.2 弱非线性系统

弱非线性系统是本章讨论的主要对象。单自由度弱非线性系统的动力学方程可写为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t) + \epsilon f(x, \dot{x}, t) \quad (2.1.9)$$

其中 $\epsilon f(x, \dot{x}, t)$ 为非线性项, ϵ 是足够小的与 x, \dot{x}, t 无关的独立参数,称为小参数。当 $\epsilon = 0$ 时,方程(2.1.9)化为线性系统的受迫振动方程:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t) \quad (2.1.10)$$

若 $F(t) = 0$, 则为线性系统的自由振动方程。方程(2.1.10)所表示的线性系统称为原非线性系统的派生系统, ω_0 为派生系统的固有频率。派生系统的解称为派生解。根据线性振动理论,派生系统的自由振动是 ω_0 频率的简谐运动。若 $F(t)$ 为周期函数,则派生系统的受迫振动是与激励频率相同的周期运动。原方程(2.1.9)的解称为基本解。若实验观测到原方程代表的实际系统存在 ω 频率的周期运动,则可将基本解展成 ω 频率的傅里叶级数,利用谐波平衡法求解。下面以达芬系统的自由振动和受迫振动为例,说明具体的解题步骤。

2.1.3 达芬系统的自由振动

达芬系统就是用达芬方程描述的系统。对于弱非线性情形,以三次项系数 ϵ 为小参数,动力学方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + \epsilon x^3) = 0 \quad (2.1.11)$$

实验观测到原系统的自由振动仍为周期运动,但频率 ω 不同于派生系统的自由振动频率 ω_0 。将基本解展成 ω 频率的傅里叶级数,作为初步近似,只保留一次谐波,写为

$$x = A \cos \omega t \quad (2.1.12)$$

将上式代入方程(2.1.11),利用三角函数公式 $\cos^3 \alpha = (3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)/4$, 化为

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} \epsilon \omega_0^2 A^2 \right) A \cos \omega t + \frac{1}{4} A^3 \cos 3\omega t = 0 \quad (2.1.13)$$

令上式中一次谐波的系数为零,导出

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{3\varepsilon}{4} A^2 \right) \quad (2.1.14)$$

因此达芬系统的自由振动频率 ω 是振幅 A 的函数。

达芬方程可作为单摆的简化数学模型,以上分析揭示了单摆等时性的近似性。伽利略观察到的单摆等时性只是线性理论的结果,它只能反映振幅极微小时的运动规律。

2.1.4 达芬系统的受迫振动

讨论带阻尼的达芬系统,设系统受频率 ω 的简谐激励,动力学方程为

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2(x + \varepsilon x^3) = B\omega_0^2 \cos(\omega t + \theta) \quad (2.1.15)$$

$\varepsilon = 0$ 时,此方程的派生系统存在与激励频率 ω 相同的简谐变化的稳态响应。由于存在阻尼,此稳态响应与激励之间有相位差。若激励力中待定的相位差 θ 恰能使响应的相位为 ωt ,则可将派生解写为

$$x = A \cos \omega t \quad (2.1.16)$$

对于 $\varepsilon \neq 0$ 情形,若实验观测到原非线性系统也存在 ω 频率的周期稳态响应,则可认为基本解也是周期函数,形式上与式(2.1.16)相同。将式(2.1.16)代入方程(2.1.15)的左边,利用与上节类似的三角变换,化为

$$\begin{aligned} & \left[A(1 - s^2) + \frac{3}{4}\varepsilon A^3 \right] \cos \omega t - (2\zeta s A) \sin \omega t + \cdots \\ & = B(\cos \theta \cos \omega t - \sin \theta \sin \omega t) \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

其中的省略号表示超过一次的高次谐波, $s = \omega/\omega_0$ 为频率比。令上式两边一次谐波的系数相等,得到

$$A(1 - s^2) + \frac{3}{4}\varepsilon A^3 = B \cos \theta, \quad 2\zeta s A = B \sin \theta \quad (2.1.18)$$

从上式中消去参数 θ , 导出达芬系统受迫振动的振幅与频率之间的关系式:

$$\left(1 - s^2 + \frac{3}{4}\varepsilon A^2 \right)^2 + (2\zeta s)^2 = \left(\frac{B}{A} \right)^2 \quad (2.1.19)$$

将上式写为

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - s^2 + \frac{3\epsilon}{4}A^2\right)^2 + (2\zeta s)^2}} \quad (2.1.20)$$

与式(0.4.6)比较可以看出,线性系统的幅频特性是式(2.1.20)中 $\epsilon = 0$ 时的特例。式(2.1.19)还可化为

$$s^4 - 2\left(1 + \frac{3\epsilon}{4}A^2 - 2\zeta^2\right)s^2 + \left(1 + \frac{3\epsilon}{4}A^2\right)^2 - \left(\frac{B}{A}\right)^2 = 0 \quad (2.1.21)$$

解出

$$s^2 = 1 + \frac{3\epsilon}{4}A^2 - 2\zeta^2 \pm \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)^2 - 4\zeta^2\left(1 + \frac{3\epsilon}{4}A^2 - \zeta^2\right)} \quad (2.1.22)$$

从式(2.1.18)中消去 B , 导出相位差与频率的关系式:

$$\theta = \arctan \frac{2\zeta s}{1 - s^2 + \frac{3\epsilon}{4}A^2} \quad (2.1.23)$$

线性系统的相频特性式(0.4.7)是式(2.1.23)中 $\epsilon = 0$ 时的特例。

2.1.5 幅频和相频特性曲线

利用式(2.1.20)可在 $(s-A)$ 参数平面内作出幅频特性曲线。令 $\epsilon = +0.04$ (硬弹簧)及 $\epsilon = -0.04$ (软弹簧), $B = 1$, 图 2.1 给出以 ζ 为参数的幅频特性曲线族。可看出非线性系统的受迫振动有与线性系统类似的幅频特性曲线。但支撑曲线族的骨架(图 2.1 中的虚线)不是直线,而是朝频率增大方向($\epsilon > 0$)或减小方向($\epsilon < 0$)弯曲,从而使整个曲线族朝一侧倾斜。此骨架曲线即无外激励时非线性系统的自由振动频率随振幅变化的曲线。令式(2.1.22)中 $B = 0$ 和 $\zeta = 0$, 求得与式(2.1.14)相同的结果:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{3\epsilon}{4}A^2\right) \quad (2.1.24)$$

与线性系统不同,由式(2.1.23)确定的相频特性与振幅 A 有关,从而间接受到激励幅值 B 的影响。令 $\epsilon = 0.2$, $\zeta = 0.03$, 图 2.2 给出以 B 为参数的相频特性曲线。

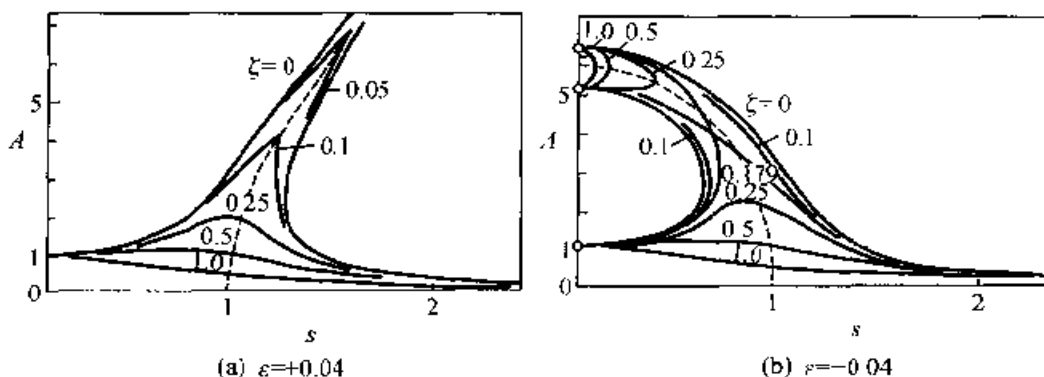


图 2.1 达芬系统的幅频特性曲线

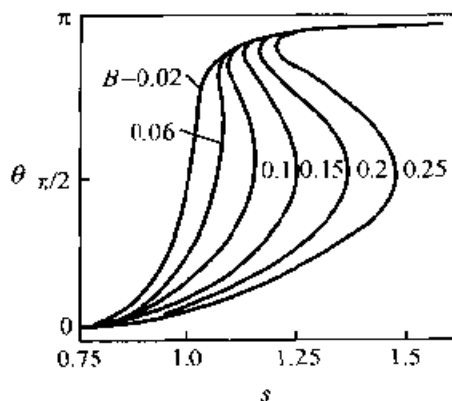


图 2.2 达芬系统的相频特性曲线

2.1.6 跳跃现象

从图 2.1 可看出非线性系统的幅频特性曲线并非单值。在激励频率的某些区间内,同一频率对应于振幅的三个不同值。实验表明,当激励频率从零开始缓慢地增大时,受迫振动振幅从图 2.3 的点 A 处沿幅频特性曲线连续变化至点 B 处。再增大频率,则振幅从点 B 突降至点 C。频率继续增大,则振幅从点 C 沿曲线的下半分支向点 D 方向移动。若激励频率从较大值开始缓慢地减小时,受迫振动振幅从点 D 开始沿曲线的下半分支连续变化至点 E,再减小频率,则振幅从点 E 突跃至点 F,频率继续减小,则振幅从点 F 沿曲线的上半分支向点 A 方向移动。因此幅频特性曲线的 BE 段对应的受迫振动不稳定。在 § 2.4 中还将从理论上证明此不稳定性。类似现象也发生于相位差随频

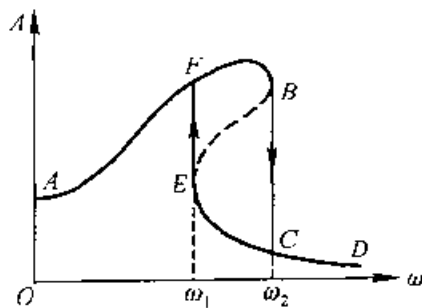


图 2.3 跳跃现象

率的变化。这种振幅突然变化的现象称为**跳跃现象**,是非线性系统特有的现象之一。系统的运动状态随着参数变化而发生突然变化的现象称为**动态分岔**,跳跃是一种特殊的动态分岔现象。

§ 2.2 正规摄动法

2.2.1 摄动法概述

1830年泊松在研究单摆的振动时,提出将非线性系统的解按小参数 ϵ 的幂次展开的近似计算方法,称为**摄动法**或**小参数法**。讨论由以下带小参数的动力学方程描述的单自由度非自治系统:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t) + \epsilon f(x, \dot{x}) \quad (2.2.1)$$

与上一节讨论的方程(2.1.1)比较,阻尼项较微弱而被忽略或并入 $\epsilon f(x, \dot{x})$ 内。当 $\epsilon = 0$ 时,方程(2.2.1)退化为固有频率为 ω_0 的线性方程:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t) \quad (2.2.2)$$

即原系统式(2.2.1)的派生系统。设 $x_0(t)$ 为派生系统的周期解,当实验观测到原系统式(2.2.1)也存在周期解时,可以在派生解 $x_0(t)$ 的基础上加以修正,构成原系统的周期解 $x(t, \epsilon)$ 。将后者展成 ϵ 的幂级数,

$$x(t, \epsilon) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \cdots \quad (2.2.3)$$

将上式代入方程(2.2.1)的两边,设 $f(x, \dot{x})$ 为 x 和 \dot{x} 的解析函数,可展成 x 和 \dot{x} 的泰勒级数。得到

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_0 + \epsilon \ddot{x}_1 + \epsilon^2 \ddot{x}_2 + \cdots + \omega_0^2 (x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots) \\ &= \epsilon \left[f(x_0, \dot{x}_0) + \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x} (\epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots) + \right. \\ & \quad \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}} (\epsilon \dot{x}_1 + \epsilon^2 \dot{x}_2 + \cdots) + \cdots + \\ & \quad \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x^2} (\epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots)^2 + \\ & \quad \frac{2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x \partial \dot{x}} (\epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots) (\epsilon \dot{x}_1 + \epsilon^2 \dot{x}_2 + \cdots) + \\ & \quad \left. \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}^2} (\epsilon \dot{x}_1 + \epsilon^2 \dot{x}_2 + \cdots)^2 + \cdots \right] + F(t) \quad (2.2.4) \end{aligned}$$

此方程对 ϵ 的任意值均成立,要求两边 ϵ 的同次幂的系数相等,由此导出各阶近似解的线性微分方程组:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = F(t) \quad (2.2.5a)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = f(x_0, \dot{x}_0) \quad (2.2.5b)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = x_1 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x} + \dot{x}_1 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}} \quad (2.2.5c)$$

.....

由以上方程组的第一式解出派生系统的解,依次代入下式求出各阶近似解,代回式(2.2.3)后即得到原系统的解。这种将弱非线性系统的解按小参数 ϵ 的幂次展开,以求渐进解的方法称为**正规摄动法**或**直接展开法**。1830年泊松最早提出摄动法的基本思想。1892年庞加莱证明此方法的合理性,指出对于弱非线性系统,当其派生系统存在周期解且 ϵ 足够小时,在适当条件下能够推断其基本系统也有相接近的周期解(参阅附录三)。实际使用小参数法时,由于计算工作量随着幂次的增高而迅速增加,因此往往只取级数的前几项。于是级数的收敛性显得并不重要,只需用截去的高阶项的 ϵ 幂次估计解的误差。近似解的正确性最终只能由实验观测来检验。

2.2.2 远离共振的受迫振动

讨论达芬系统受简谐激励的受迫振动,动力学方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + \epsilon x^3) = F_0 \cos \omega t \quad (2.2.6)$$

其中激励频率 ω 远离派生系统的固有频率 ω_0 。将级数形式的解(2.2.3)代入方程(2.2.6),导出以下线性微分方程组:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = F_0 \cos \omega t \quad (2.2.7a)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\omega_0^2 x_0^3 \quad (2.2.7b)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -3\omega_0^2 x_0^2 x_1 \quad (2.2.7c)$$

.....

零次近似方程(2.2.7a)为线性系统的受迫振动方程,有以下一般解:

$$x_0 = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) + A \cos \omega t \quad (2.2.8)$$

式中右边第一项为自由振动, A_0 和 θ_0 为积分常数,由初始条件确定;第二项为受迫振动,振幅 A 为

$$A = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.2.9)$$

由于系统中不可避免地存在阻尼,自由振动趋于衰减可予略去。只保留受迫振动项

$$x_0 = A \cos \omega t \quad (2.2.10)$$

代入一次近似方程的右边,利用三角函数公式化为

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\omega_0^2 A^3 \left(\frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \right) \quad (2.2.11)$$

其受迫振动特解为

$$x_1 = B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 3\omega t \quad (2.2.12)$$

其中

$$B_1 = -\frac{3\omega_0^2 A^3}{4(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad B_2 = -\frac{\omega_0^2 A^3}{4(\omega_0^2 - 9\omega^2)} \quad (2.2.13)$$

将式(2.2.10)和(2.2.12)代入二次近似方程(2.2.7c)的右边,进行必要的三角函数运算以后,得到

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -\frac{3}{4} \omega_0^2 A^2 [(3B_1 + B_2) \cos \omega t + B_1 \cos 3\omega t + B_2 \cos 5\omega t] \quad (2.2.14)$$

其受迫振动特解为

$$x_2 = C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 3\omega t + C_3 \cos 5\omega t \quad (2.2.15)$$

其中

$$C_1 = -\frac{3\omega_0^2 A^2}{4} \left(\frac{3}{4} B_1 - \frac{1}{4} B_2 \right), \quad C_2 = -\frac{3\omega_0^2 A^2 \left(\frac{1}{4} B_1 - \frac{1}{2} B_2 \right)}{\omega_0^2 - 9\omega^2},$$

$$C_3 = -\frac{3\omega_0^2 A^2 B_2}{4(\omega_0^2 - 25\omega^2)} \quad (2.2.16)$$

继续运算可求出更高阶的近似解。将求出的各阶近似解代入式(2.2.3),最终得到基本系统的受迫振动规律为

$$x = (A + B_1 \epsilon + C_1 \epsilon^2 + \cdots) \cos \omega t + (B_2 \epsilon + C_2 \epsilon^2 + \cdots) \cos 3\omega t + (C_3 \epsilon^2 + \cdots) \cos 5\omega t + \cdots \quad (2.2.17)$$

省略号包含更高阶的近似解。与线性系统的受迫振动比较,非线性系统在 ω 频率的激励作用下,所产生的响应中不仅包含 ω 频率的受迫振动,而且有 $3\omega, 5\omega, \cdots$ 等频率高次谐波同时发生,称为**倍频响应**,是非线性系统的又一特有现象。

2.2.3 多频激励的受迫振动

设硬弹簧系统同时受到两个频率不同的简谐激励,激励频率 ω_1 和 ω_2 都远离派生系统的固有频率,动力学方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + \epsilon x^3) = F_1 \cos \omega_1 t + F_2 \cos \omega_2 t \quad (2.2.18)$$

将级数形式解(2.2.3)代入方程(2.2.18),导出以下线性方程组:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = F_1 \cos \omega_1 t + F_2 \cos \omega_2 t \quad (2.2.19a)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\omega_0^2 x_0^3 \quad (2.2.19b)$$

.....

零次近似方程(2.2.19a)的受迫振动特解为

$$x_0 = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t \quad (2.2.20)$$

其中

$$A_1 = \frac{F_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}, \quad A_2 = \frac{F_2}{\omega_0^2 - \omega_2^2} \quad (2.2.21)$$

将式(2.2.20)代入一次近似方程(2.2.19b),整理后为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = & -\omega_0^2 \left\{ \frac{3}{4} A_1 (A_1^2 + 2A_2^2) \cos \omega_1 t + \right. \\ & \frac{3}{4} A_2 (2A_1^2 + A_2^2) \cos \omega_2 t + \frac{1}{4} A_1^3 \cos 3\omega_1 t + \\ & \frac{1}{4} A_2^3 \cos 3\omega_2 t + \frac{3}{4} A_1^2 A_2 [\cos(2\omega_1 + \omega_2)t + \cos(2\omega_1 - \omega_2)t] + \\ & \left. \frac{3}{4} A_1 A_2^2 [\cos(2\omega_2 + \omega_1)t + \cos(2\omega_2 - \omega_1)t] \right\} \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

一次近似方程的响应所包含的谐波频率中,除了激励频率 ω_1 和 ω_2 及其倍数以外,还存在 $2\omega_1 + \omega_2, 2\omega_2 + \omega_1, |2\omega_1 - \omega_2|, |2\omega_2 - \omega_1|$ 等组合频率,这种从根本上不服从线性系统叠加原理的频率耦合现象,是非线性系统的又一重要特征。亥姆霍兹(H. Helmholtz)的研究表明,人耳的鼓膜是一个恢复力特性含平方项的非线性弹性元件,因此在受到 ω_1 和 ω_2 两种频率声波的激励时也能听到 ω_1 和 ω_2 的倍频以及 $\omega_1 + \omega_2, |\omega_1 - \omega_2|$ 等组合频率的声音。

2.2.4 久期项问题

以上用正规摄动法成功地讨论了非线性系统的受迫振动,但在处理

自由振动时却遇到了困难。仍以达芬系统为例,其自由振动方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + \epsilon x^3) = 0 \quad (2.2.23)$$

将级数形式解(2.2.3)代入方程(2.2.23),导出以下线性方程组:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (2.2.24a)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\omega_0^2 x_0^3 \quad (2.2.24b)$$

.....

零次近似方程(2.2.19a)的自由振动解为

$$x_0 = A \cos \omega_0 t \quad (2.2.25)$$

将此零次近似解代入一次近似方程(2.2.24b),整理后为

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\omega_0^2 A^3 \left(\frac{3}{4} \cos \omega_0 t + \frac{1}{4} \cos 3\omega_0 t \right) \quad (2.2.26)$$

于是出现了激励频率与固有频率 ω_0 相同的共振情况。由于线性系统在共振情况下的响应中可出现振幅随时间无限增加的项,从而与解的周期性产生矛盾,也违背保守系统机械能守恒的物理定律。这种随时间不断增长的项称为久期项。久期项的出现反映出正规摄动法的缺陷。为消除久期项,提出了各种改进方法,统称为奇异摄动法。下节中叙述的林滋泰德-庞加莱方法就是奇异摄动法中的一种。

§ 2.3 林滋泰德-庞加莱法

2.3.1 达芬系统的自由振动

1883年林滋泰德为了消除天文学中的久期项,提出对正规摄动法的改进,1892年庞加莱为改进的摄动法的合理性进行了数学证明,因此称为林滋泰德-庞加莱法。该方法的基本思想是认为非线性系统的固有频率 ω 并不等于派生系统的固有频率 ω_0 ,而也应该是小参数 ϵ 的未知函数。因此在将基本解展成 ϵ 的幂级数的同时,应将频率 ω 也写成 ϵ 的幂级数,幂级数的待定系数根据周期运动的要求依次确定。

以达芬系统的自由振动为例,动力学方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + \epsilon x^3) = 0 \quad (2.3.1)$$

规定初始条件为

$$x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (2.3.2)$$

将原系统的解展成 ϵ 的幂级数:

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots \quad (2.3.3)$$

同时将原系统的自由振动频率 ω 也展成 ϵ 的幂级数,

$$\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \cdots \quad (2.3.4)$$

也可将上式两边平方, 写为幂级数的另一种形式:

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 + \epsilon \sigma_1 + \epsilon^2 \sigma_2 + \cdots) \quad (2.3.5)$$

将式(2.3.3)和(2.3.5)代入方程(2.3.1), 引入新的自变量 $\psi = \omega t$, 将原来的微分符号改定义为对 ψ 的微分, 令 ϵ 的同次幂的每一项系数为零, 导出以下各阶近似的线性方程组:

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0 \quad (2.3.6a)$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -(\sigma_1 \dot{x}_0 + x_0^3) \quad (2.3.6b)$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -(\sigma_2 \dot{x}_0 + \sigma_1 \ddot{x}_1 + 3x_0^2 x_1) \quad (2.3.6c)$$

.....

各方程的初始条件为

$$\left. \begin{aligned} x_0(0) &= A, & \dot{x}_0(0) &= 0 \\ x_1(0) &= 0, & \dot{x}_1(0) &= 0 \\ x_2(0) &= 0, & \dot{x}_2(0) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (2.3.7)$$

从零次近似方程(2.3.6a)和初始条件(2.3.7)解出

$$x_0 = A \cos \psi \quad (2.3.8)$$

将此零次近似解代入一次近似方程(2.3.6b)的右边, 整理后得到

$$\ddot{x}_1 + x_1 = A \left(\sigma_1 - \frac{3}{4} A^2 \right) \cos \psi - \frac{1}{4} A^3 \cos 3\psi \quad (2.3.9)$$

为避免此方程的解中出现久期项, 以保证 $x_1(t)$ 的周期性, 必须令方程右边 $\cos \psi$ 项的系数等于零, 导出

$$\sigma_1 = \frac{3}{4} A^2 \quad (2.3.10)$$

满足此条件时, 一次近似方程(2.3.9)满足初始条件(2.3.7)的解为

$$x_1 = -\frac{A^3}{32} (\cos \psi - \cos 3\psi) \quad (2.3.11)$$

将上式和式(2.3.8)代入方程(2.3.6c), 经过三角函数运算后, 得到

$$\ddot{x}_2 + x_2 = A \left(\sigma_2 + \frac{3A^4}{128} \right) \cos \psi + \frac{24A^5}{128} \cos 3\psi - \frac{3A^5}{128} \cos 5\psi \quad (2.3.12)$$

为避免久期项, 保证 $x_2(t)$ 的周期性, 仍令方程右边 $\cos \psi$ 项的系数为零, 得到

$$\sigma_2 = -\frac{3A^4}{128} \quad (2.3.13)$$

则二次近似方程(2.3.12)有以下满足初始条件(2.3.7)的解:

$$x_2 = \frac{A^5}{1024}(23\cos \psi - 24\cos 3\psi + \cos 5\psi) \quad (2.3.14)$$

重复同样步骤计算下去, 最终求出能满足所需精确度的周期解

$$\begin{aligned} x &= A \cos \psi - \frac{\epsilon A^3}{32}(\cos \psi - \cos 3\psi) + \\ &\quad \frac{\epsilon^2 A^5}{1024}(23\cos \psi - 24\cos 3\psi + \cos 5\psi) + \cdots \\ &= \left(A - \frac{\epsilon A^3}{32} + \frac{23\epsilon^2 A^5}{1024} + \cdots \right) \cos \psi + \\ &\quad \left(\frac{\epsilon A^3}{32} - \frac{3\epsilon^2 A^5}{128} + \cdots \right) \cos 3\psi + \left(\frac{\epsilon^2 A^5}{1024} + \cdots \right) \cos 5\psi \quad (2.3.15) \end{aligned}$$

以及自由振动频率与振幅的关系式

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{3\epsilon A^2}{4} - \frac{3\epsilon^2 A^4}{128} + \cdots \right) \quad (2.3.16)$$

不考虑二阶小量, 上式与 § 2.1 中用谐波平衡法导出的结果(2.1.14)一致。以上分析表明, 达芬系统的自由振动为周期运动, 相轨迹为封闭曲线族。自由振动的频率随振幅改变(图 2.4), 而不同于线性系统的固有

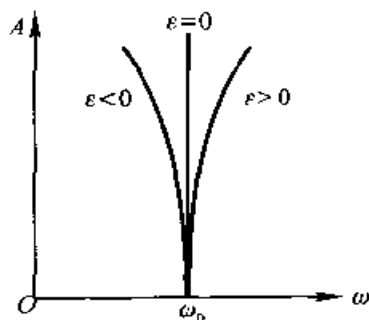


图 2.4 达芬系统的自由振动频率与振幅关系曲线

频率。还可看出, 周期解中除基频为 ω 的谐波以外, 还有频率为 $3\omega, 5\omega$ 的高次谐波存在, 是非线性系统区别于线性系统的又一本质特点。在声学中这些高次谐波称为泛音, 各种声音的不同泛音结构决定了它们固有的音色。

2.3.2 接近共振的受迫振动

讨论带微弱阻尼的达芬系统接近共振的受迫振动。设激励力的幅值与小参数 ϵ 同数量级, 动力学方程为

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2(x + \epsilon x^3) = \epsilon F_0 \cos(\omega t + \theta) \quad (2.3.17)$$

设阻尼项、激励频率与派生系统的固有频率之差均与小参数 ϵ 同数量级, 令

$$\zeta = \epsilon \zeta_1, \quad \omega^2 = \omega_0^2(1 + \epsilon \sigma_1) \quad (2.3.18)$$

将基本系统的解 $x(t)$ 展成 ϵ 的幂级数如式(2.3.3), 与式(2.3.18)一同代入方程(2.3.17)。令 $F_0 = \omega_0^2 B_1$, 引入新的自变量 $\psi = \omega t$, 令两边 ϵ 的同次幂系数相等, 导出各阶近似方程组:

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0 \quad (2.3.19a)$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\sigma_1 \dot{x}_0 - 2\zeta_1 \dot{x}_0 - x_0^3 + B_1(\cos \theta \cos \psi + \sin \theta \sin \psi) \quad (2.3.19b)$$

.....

由于阻尼的存在, 系统的激励与响应之间有相位差。设激励力中待定的初相角 θ 恰能使响应的相位为 ωt , 则零次近似方程(2.3.19a)的解可写为

$$x_0 = A \cos \psi \quad (2.3.20)$$

将此零次近似解代入一次近似方程的右边, 整理后得到

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 = & \left(\sigma_1 A - \frac{3}{4} A^3 + B_1 \cos \theta \right) \cos \psi + \\ & (2\zeta_1 A - B_1 \sin \theta) \sin \psi - \frac{1}{4} A^3 \cos 3\psi \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

为避免此方程的解中出现久期项以保证响应的周期性, 必须令上式右边 $\cos \psi$ 和 $\sin \psi$ 的系数为零, 得到

$$\sigma_1 A - \frac{3}{4} A^3 + B_1 \cos \theta = 0, \quad 2\zeta_1 A - B_1 \sin \theta = 0 \quad (2.3.22)$$

消去上式中的待定参数 θ , 导出

$$\left(\frac{3}{4} A^2 - \sigma_1 \right)^2 + (2\zeta_1)^2 = \frac{B_1^2}{A^2} \quad (2.3.23)$$

将上式各项乘以 ϵ^2/ω_0^4 , 令 $\epsilon \sigma_1 = (\omega/\omega_0)^2 - 1$, $\epsilon \zeta_1 = \zeta$, $\epsilon B_1 = B$, 化为

$$\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{3}{4} \epsilon A^2 \right]^2 + (2\zeta)^2 = \left(\frac{B}{A} \right)^2 \quad (2.3.24)$$

精确到 ϵ 数量级时, 可将式(2.3.24)中的 ζ 以 $\zeta(\omega/\omega_0)$ 代替, 则得到 § 2.1 中用谐波平衡法导出的相同结论(2.1.19):

$$\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{3}{4}\epsilon A^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{B}{A}\right)^2 \quad (2.3.25)$$

展开后得到与式(2.1.22)相同的幅频关系式:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[1 + \frac{3\epsilon}{4}A^2 - 2\zeta^2 \pm \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)^2 - 4\zeta^2 \left(1 + \frac{3\epsilon}{4}A^2 - \zeta^2\right)}\right] \quad (2.3.26)$$

幅频关系曲线见图 2.1。关于跳跃现象的分析也完全相同。

2.3.3 亚谐波共振

实践中观察到,当达芬系统的派生系统固有频率 ω_0 接近激励频率 ω 的 $1/3$ 时,也可能发生强烈的共振现象,称为 $1/3$ 次亚谐波响应或 $1/3$ 次亚谐波共振。

由于亚谐波响应通常由较强的激励引起,因此激励力不是与 ϵ 同数量级的微量。将方程中的 ϵF_0 以 F_0 代替、小参数 $\epsilon\omega_0$ 以 ϵ 代替,令 $\zeta=0, \theta=0$,导出无阻尼达芬方程:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon x^3 = F_0 \cos \omega t \quad (2.3.27)$$

设 ω_0 与 $\omega/3$ 之差与小参数 ϵ 同数量级,令

$$\left(\frac{\omega}{3}\right)^2 = \omega_0^2 + \epsilon \sigma_1 \quad (2.3.28)$$

将解的幂级数展开式(2.3.3)和式(2.3.28)代入方程(2.3.27),令两边 ϵ 的同次幂系数相等,导出各阶近似方程组:

$$\ddot{x}_0 + \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 x_0 = F_0 \cos \omega t \quad (2.3.29a)$$

$$\ddot{x}_1 + \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 x_1 = \sigma_1 x_0 - x_0^3 \quad (2.3.29b)$$

.....

零次近似方程(2.3.29a)的解由 $\omega/3$ 频率的自由振动和 ω 频率的受迫振动组成:

$$x_0 = A_{1/3} \cos \frac{\omega t}{3} + A \cos \omega t \quad (2.3.30)$$

其中自由振动的振幅 $A_{1/3}$ 取决于初始条件,受迫振动的振幅 A 为

$$A = -\frac{9F_0}{8\omega^2} \quad (2.3.31)$$

将零次近似解(2.3.30)代入一次近似方程(2.3.29b),整理后得到

$$\ddot{x}_1 + \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 x_1 = \left(\sigma_1 - \frac{3}{4}A_{1/3}^2 - \frac{3}{4}AA_{1/3} - \frac{3}{2}A^2\right)A_{1/3}\cos\frac{\omega t}{3} + \left(\sigma_1 A - \frac{3}{4}A^3 - \frac{3}{2}AA_{1/3}^2 - \frac{1}{4}A_{1/3}^3\right)\cos\omega t + \dots \quad (2.3.32)$$

其中省略号为频率高于 ω 的高次谐波。为避免方程(2.3.32)的解出现久期项,令方程右边 $\cos(\omega t/3)$ 的系数为零,得到

$$A_{1/3} = 0 \quad (2.3.33a)$$

或

$$A_{1/3}^2 + AA_{1/3} + 2A^2 - \frac{4}{3}\sigma_1 = 0 \quad (2.3.33b)$$

解出 $A_{1/3}$ 的非零解:

$$A_{1/3} = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{3}\sigma_1 - \frac{7}{4}A^2} \quad (2.3.34)$$

将式(2.3.28)和(2.3.31)代入上式,化为

$$A_{1/3} = \frac{9F_0}{16\omega^2} \pm \sqrt{\frac{4}{3\epsilon}\left(\frac{\omega^2}{9} - \omega_0^2\right) - \frac{567F_0^2}{256\omega^4}} \quad (2.3.35)$$

对于 $\epsilon > 0$ 和 $\epsilon < 0$ 两种情形,从上式导出的实数解条件,即亚谐波响应的产生条件:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^2 &\leq \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{15\,309\epsilon F_0^2}{1\,024\omega^6}\right) & (\epsilon > 0) \\ \omega_0^2 &\geq \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 \left(1 + \frac{15\,309|\epsilon| F_0^2}{1\,024\omega^6}\right) & (\epsilon < 0) \end{aligned} \right\} \quad (2.3.36)$$

可见当派生系统的固有频率 ω_0 恰好准确地等于 $\omega/3$ 时,亚谐波响应反而不可能发生。亚谐波响应的幅频特性曲线为式(2.3.35)所确定的抛物线:

$$\left(A_{1/3} - \frac{9F_0}{16\omega^2}\right)^2 + \frac{4\omega_0^2}{3\epsilon} = \frac{4\omega^2}{27\epsilon} - \frac{567F_0^2}{256\omega^4} \quad (2.3.37)$$

以 ω_0^2 为横坐标轴作出 $A_{1/3}$ 的幅频特性曲线如图2.5所示。图中每条曲线均有两个分支,因此同一频率对应于振幅的两个不同值,但其中只有振幅较大的分

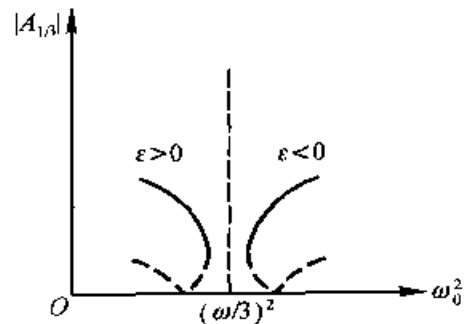


图 2.5 亚谐波响应的幅频特性曲线

支是稳定的。关于亚谐波响应的稳定性问题,将在 § 2.5 中利用多尺度法作深入讨论。在图 2.5 中,分别以实线和虚线表示稳定或不稳定的亚谐波响应。

§ 2.4 平 均 法

2.4.1 弱非线性系统的自由振动

前面叙述的几种近似解析方法,对于弱非线性系统原则上可求出满足任意精度要求的周期解。但在具体计算时, ϵ 的次数愈高,计算工作愈繁。如果所要求的精度只限于 ϵ 的一次项,则可采用更为有效的方法直接求出一次近似解,这就是非线性振动解析方法的一次近似理论,其中最主要的方法为平均法。早在 18 世纪的拉格朗日时代,平均法的基本思想就已在天体力学中行星轨道演化的计算中得到应用。1920 年范德波尔在研究电子管的非线性振荡时,使用了慢变系数法,形成平均法的基础。以后经过克雷洛夫、包戈留包夫等人的工作使平均法更趋完善^[4,6]。

讨论弱非线性系统的自由振动,动力学方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon f(x, \dot{x}) \quad (2.4.1)$$

当 $\epsilon = 0$ 时,方程(2.4.1)的派生系统为线性保守系统

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.4.2)$$

此派生系统的自由振动解为

$$x = a \cos(\omega_0 t - \theta) \quad (2.4.3)$$

其中任意常数 a 和 θ 取决于初始条件,将上式对 t 微分一次,得到

$$\dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t - \theta) \quad (2.4.4)$$

当 $\epsilon \neq 0$ 时,原系统(2.4.1)的解不同于(2.4.3),甚至不一定是周期函数。但如果当 ϵ 充分小时,实际观察到原系统的运动与周期运动十分接近,只是振幅和初相角随时间 t 缓慢变化,则可将方程(2.4.1)的解 $x(t)$ 和 $\dot{x}(t)$ 在形式上仍写作式(2.4.3)和(2.4.4),只是其中的 a 和 θ 视为时间的函数。考虑 a 和 θ 的变化,将式(2.4.3)对时间 t 微分,消去式(2.4.4)后导出

$$\dot{a} \cos \psi + a \dot{\theta} \sin \psi = 0 \quad (2.4.5)$$

其中 $\psi = \omega_0 t - \theta$ 。将式(2.4.4)对 t 微分,代入方程(2.4.1),得到

$$-\dot{a} \sin \psi + a\dot{\theta} \cos \psi = \frac{\varepsilon}{\omega_0} f(x, \dot{x}) \quad (2.4.6)$$

从式(2.4.5)和(2.4.6)导出 a 和 θ 的微分方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) \sin \psi \\ \dot{\theta} &= \frac{\varepsilon}{\omega_0 a} f(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) \cos \psi \end{aligned} \right\} \quad (2.4.7)$$

当参数 ε 充分小时, a 和 θ 是在常数附近缓慢变化的函数。将方程组(2.4.7)的右项以 ψ 的一个周期中的平均值近似地代替, 并认为 a 和 θ 在 ψ 的一个周期内保持不变。这样得到的方程称为原方程的平均化方程

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{2\omega_0} Q(a, \theta) \quad (2.4.8a)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{2\omega_0 a} P(a, \theta) \quad (2.4.8b)$$

式中函数 P 和 Q 定义为

$$\left. \begin{aligned} P(a, \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) \cos \psi d\psi \\ Q(a, \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) \sin \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (2.4.9)$$

上述简化方法即为平均法。它的物理本质是: 在每一个运动周期中认为运动是简谐振动, 但第二个周期的振幅和初相角与第一个周期相比, 已经发生了微小的改变。平均化方程(2.4.8)就是描述振幅和初相角变化规律的微分方程。也可形象地认为, 简化方程是计算振动过程的包络线方程(图 2.6)。因此平均法也可称为常数变易法或慢变振幅法。

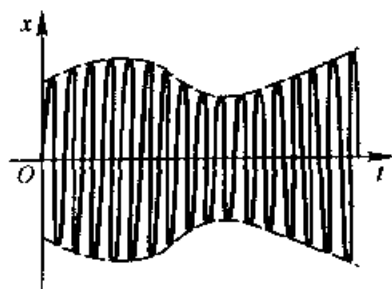


图 2.6 振动过程的平均化

2.4.2 动相平面

将方程(2.4.8a)与(2.4.8b)相除, 得到 a 和 θ 的自治形式一阶微分方程

$$\frac{da}{a d\theta} = -\frac{Q(a, \theta)}{P(a, \theta)} \quad (2.4.10)$$

令 $x_1 = a \cos \theta$, $y_1 = a \sin \theta$, 则方程(2.4.10)确定 (x_1, y_1) 平面内极坐标形

式的积分曲线。以 x 和 $y = \dot{x}/\omega_0$ 为坐标轴建立相平面 (x, y) , 可以认为 (x_1, y_1) 平面相对 (x, y) 平面以角速度 ω_0 匀速旋转。相点在 (x, y) 平面内的坐标可根据式(2.4.3)和(2.4.4), 用 (x_1, y_1) 平面内的坐标表示(图 2.7)。将 (x_1, y_1) 平面称为动相平面, 则方程(2.4.10)成为动相平面内的相轨迹微分方程。将动相平面 (x_1, y_1) 内的相轨迹投影到静止的 (x, y)

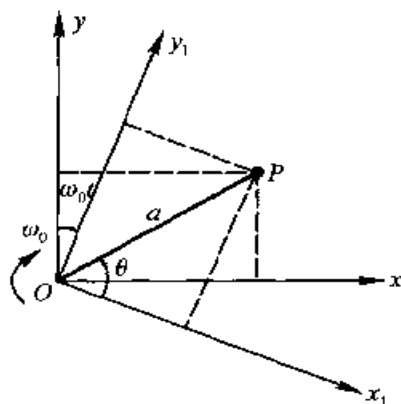


图 2.7 动相平面和静相平面

相平面, 就得到描述运动过程的实际相轨迹。动相平面内除原点以外的奇点 (a_s, θ_s) 在静相平面内产生的圆轨迹对应于系统的简谐运动。当 ε 充分小时, 动相平面的相点在奇点附近作缓慢的运动, 与动相平面的迅速转动相比较, 是时间尺度完全不同的两种运动。系统的实际运动为不同时间尺度的两种运动的综合。

动相平面概念的建立扩大了第一章中叙述的定性理论的应用范围, 使以相平面法为主的几何方法不仅适用于自治系统, 而且可扩大到非自治系统。

2.4.3 谐波线性化法

注意到式(2.4.9)中的积分 P 和 Q 恰好是非线性函数 f 对变量 $\psi = \omega_0 t - \theta$ 展开的周期为 2π 的傅里叶级数的第一阶谐波的系数。忽略其它高次谐波时, 可近似将函数 f 写为

$$f = P(a, \theta) \cos \psi + Q(a, \theta) \sin \psi \quad (2.4.11)$$

利用式(2.4.3)和(2.4.4), 将上式改写为

$$f = \frac{1}{a} P(a, \theta) x - \frac{1}{a\omega_0} Q(a, \theta) \dot{x} \quad (2.4.12)$$

将上式代入基本系统(2.4.1)的动力学方程, 整理后得到线性方程

$$\ddot{x} + \left[\frac{\varepsilon}{a\omega_0} Q(a, \theta) \right] \dot{x} + \left[\omega_0^2 - \frac{\varepsilon}{a} P(a, \theta) \right] x = 0 \quad (2.4.13)$$

仅讨论系统的周期运动时, 可将上式中的 a 和 θ 视为常数, 则方程(2.5.13)成为线性常系数常微分方程, 而简化为线性系统的自由振动问题。这种从平均法演变出来的近似解析方法称为谐波线性化法。

2.4.4 弱非线性系统的受迫振动

讨论弱非线性系统接近共振的受迫振动。在方程(2.4.1)的右项中增加频率为 ω 的简谐激励力, 写为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon [f(x, \dot{x}) + F_0 \cos \omega t] \quad (2.4.14)$$

利用式(2.3.18), 令 $\omega^2 = \omega_0^2(1 + \epsilon\sigma_1)$, 将方程(2.4.14)化为

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \epsilon f_1(x, \dot{x}, \omega t) \quad (2.4.15)$$

其中

$$f_1(x, \dot{x}, \omega t) = f(x, \dot{x}) + \omega_0^2 \sigma_1 x + F_0 \cos \omega t \quad (2.4.16)$$

令方程(2.4.15)中 $\epsilon = 0$, 导出派生系统的解及其导数

$$x = a \cos(\omega t - \theta) \quad (2.4.17)$$

$$\dot{x} = -a\omega \sin(\omega t - \theta) \quad (2.4.18)$$

当 $\epsilon \neq 0$ 时, 将原系统(2.4.15)的解 $x(t)$ 和 $\dot{x}(t)$ 在形式上仍写为式(2.4.17)和(2.4.18), 只是其中的 a 和 θ 视为时间的慢变函数。将式(2.4.17)对时间 t 微分, 令 $\psi = \omega t - \theta$, 消去式(2.4.18), 得到

$$\dot{a} \cos \psi + a\dot{\theta} \sin \psi = 0 \quad (2.4.19)$$

将式(2.4.18)对 t 微分, 代入方程(2.4.15), 得到

$$-\dot{a} \sin \psi + a\dot{\theta} \cos \psi = \frac{\epsilon}{\omega} f_1(x, \dot{x}, \omega t) \quad (2.4.20)$$

从式(2.4.19)和(2.4.20)导出 a 和 θ 的微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\epsilon}{\omega} f_1(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi, \psi + \theta) \sin \psi \\ \dot{\theta} &= \frac{\epsilon}{\omega a} f_1(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi, \psi + \theta) \cos \psi \end{aligned} \right\} \quad (2.4.21)$$

讨论 a 和 θ 的慢变规律时, 将方程组(2.4.21)的右项以 ψ 的一个周期中的平均值近似地代替, 并认为 a 和 θ 在 ψ 的一个周期内保持不变。得到方程(2.4.21)的平均化方程:

$$\dot{a} = -\frac{\epsilon}{2\omega} Q(a, \theta) \quad (2.4.22a)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\epsilon}{2\omega a} P(a, \theta) \quad (2.4.22b)$$

式中函数 P 和 Q 定义为

$$\left. \begin{aligned} P(a, \theta) &= \Psi(a, \omega) + F_0 \cos \theta \\ Q(a, \theta) &= \Phi(a, \omega) - F_0 \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.4.23)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \Psi(a, \omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi + \omega_0^2 \sigma_1 a \\ \Phi(a, \omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (2.4.24)$$

将式(2.4.23)代入方程(2.4.22),得到

$$\dot{a} = -\frac{\epsilon}{2\omega} [\Phi(a, \omega) - F_0 \sin \theta] \quad (2.4.25a)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\epsilon}{2\omega a} [\Psi(a, \omega) + F_0 \cos \theta] \quad (2.4.25b)$$

将方程组(2.4.25)的二方程两边分别相除,化为自治形式的一阶微分方程:

$$\frac{da}{d\theta} = -\frac{a[\Phi(a, \omega) - F_0 \sin \theta]}{\Psi(a, \omega) + F_0 \cos \theta} \quad (2.4.26)$$

当激励的幅值 F_0 和频率 ω 给定以后,方程(2.4.26)完全确定动相平面内的相轨迹。动相平面内的奇点 (a_s, θ_s) 对应于系统的稳态响应,为以下方程的解:

$$\Psi_s + F_0 \cos \theta_s = 0, \quad \Phi_s - F_0 \sin \theta_s = 0 \quad (2.4.27)$$

其中下角标 s 表示在奇点处的函数值。消去上式中的变量 θ_s , 导出受迫振动的振幅 a_s 与频率 ω 之间的关系式,即系统的幅频特性:

$$W(a_s, \omega) = \Psi_s^2 + \Phi_s^2 - F_0^2 = 0 \quad (2.4.28)$$

消去式(2.4.27)中的 F_0 , 则导出系统的相频特性:

$$\theta_s = \arctan\left(-\frac{\Phi_s}{\Psi_s}\right) \quad (2.4.29)$$

与前面叙述的几种近似方法比较,平均法不仅能计算幅频和相频特性,而且能利用平均化方程(2.4.25)或(2.4.26)分析受迫振动的稳定性和全局运动性态。引入扰动变量 $\xi = a - a_s$ 和 $\eta = \theta - \theta_s$, 列出方程组(2.4.25)在奇点 (a_s, θ_s) 附近的一次近似式

$$2\omega \dot{\xi} = -\epsilon \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial a} \right)_s \xi - F_0 \cos \theta_s \eta \right] \quad (2.4.30a)$$

$$2\omega\dot{\eta} = \epsilon \left\{ \frac{1}{a_s} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial a} \right)_s - \frac{1}{a_s^2} (\Psi_s + F_0 \cos \theta_s) \right] \xi - F_0 \sin \theta_s \eta \right\} \quad (2.4.30b)$$

利用关系式(2.4.27)化为

$$\left. \begin{aligned} 2\omega\dot{\xi} + \epsilon \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a} \right)_s \xi + \epsilon \Psi_s \eta &= 0 \\ 2\omega\dot{\eta} - \frac{\epsilon}{a_s} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial a} \right)_s \xi + \frac{\epsilon}{a_s} \Phi_s \eta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.31)$$

此线性扰动方程的本征方程为

$$\begin{vmatrix} 2\omega\lambda + \epsilon \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a} \right)_s & \epsilon \Psi_s \\ -\frac{\epsilon}{a_s} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial a} \right)_s & 2\omega\lambda + \frac{\epsilon}{a_s} \Phi_s \end{vmatrix} = 4\omega^2(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0 \quad (2.4.32)$$

其中

$$a_1 = \frac{\epsilon}{2\omega a_s} \left[\frac{\partial(a\Phi)}{\partial a} \right]_s, \quad a_2 = \frac{\epsilon^2}{8\omega^2 a_s} \left(\frac{\partial W}{\partial a} \right)_s \quad (2.4.33)$$

根据李雅普诺夫的一次近似稳定性理论, $a_1 > 0, a_2 > 0$ 是奇点 (a_s, θ_s) 渐近稳定的充分条件。若 $a_2 < 0$, 即 $(\partial W / \partial a)_s < 0$, 则奇点必不稳定。利用此条件很容易在幅频特性曲线上画出不稳定部分。稳定区与不稳定区的分界点对应于 $(\partial W / \partial a)_s = 0$, 即幅频特性曲线相对 a 轴的斜率为零的点。在图 2.8 中, 分别以实线和虚线表示稳定与不稳定。

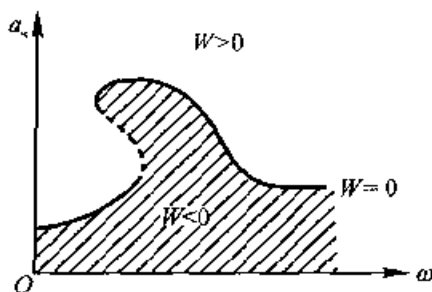


图 2.8 幅频特性曲线上的稳定区与不稳定区

对方程(2.4.26)作数值积分, 可画出动相平面内的相轨迹曲线族, 以描绘系统受迫振动的全局运动性态。

2.4.5 达芬系统

1. 达芬系统的自由振动

仍以达芬系统作为典型的弱非线性系统, 先讨论其自由振动。动力学微分方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + \varepsilon x^3) = 0 \quad (2.4.34)$$

即 $f(x) = -\omega_0^2 x^3$, 令 $x = a \cos(\omega_0 t - \theta)$, 代入式(2.4.9), 积分得到

$$P = -\frac{3}{4}\omega_0^2 a^3, \quad Q = 0 \quad (2.4.35)$$

代入平均化方程组(2.4.8), 得到

$$\dot{a} = 0, \quad \dot{\theta} = -\frac{3}{8}\varepsilon\omega_0 a^2 \quad (2.4.36)$$

a 为常值, 表明达芬系统的自由振动为简谐运动, 振动频率为

$$\omega = \omega_0 - \dot{\theta} = \omega_0 \left(1 + \frac{3\varepsilon}{8}a^2\right) \quad (2.4.37)$$

在 ε 的一次项精度范围内, 此结果与用谐波平衡法或林滋泰德-庞加莱法导出的式(2.1.14)或(2.3.16)完全一致。利用式(2.4.13)可写出达芬方程的谐波线性化方程:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{3\varepsilon}{4}a^2\right)x = 0 \quad (2.4.38)$$

2. 达芬系统的受迫振动

讨论达芬系统的接近共振的受迫振动。设系统内含有微弱的阻尼项, 其受迫振动微分方程为

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2(x + \varepsilon x^3) = \varepsilon F_0 \cos \omega t \quad (2.4.39)$$

令 $\zeta = \varepsilon\zeta_1$, $\omega^2 = \omega_0^2(1 + \varepsilon\sigma_1)$, 写为式(2.4.15)的形式, 其中

$$f(x, \dot{x}, \omega t) = -2\zeta_1\omega_0\dot{x} + \omega_0^2(\sigma_1 x - x^3) + F_0 \cos \omega t \quad (2.4.40)$$

令 $x = a \cos(\omega t - \theta)$, 代入式(2.4.24), 积分得到

$$\Phi(a, \omega) = 2\zeta_1\omega_0 a \omega, \quad \Psi(a, \omega) = \omega_0^2 a \left(\sigma_1 - \frac{3}{4}a^2\right) \quad (2.4.41)$$

代入式(2.4.28)和(2.4.29), 令 $\varepsilon F_0 = \omega_0^2 B$, 导出与式(2.1.19)、(2.1.24)完全相同的幅频特性和相频特性关系式:

$$\left(1 - s^2 + \frac{3}{4}\varepsilon a_s^2\right)^2 + (2\zeta_s)^2 = \left(\frac{B}{a_s}\right)^2 \quad (2.4.42)$$

$$\theta_s = \arctan \frac{2\zeta s}{1 - s^2 + \frac{3\varepsilon}{4}a_s^2} \quad (2.4.43)$$

其中 $s = \omega/\omega_0$, a_s, θ_s 为 a, θ 的稳态值。根据上一节的分析, 图 2.3 中的幅频特性曲线的虚线部分因满足 $(\partial W/\partial a) < 0$ 而证明为不稳定, 从而解释了跳跃现象的产生原因。将式(2.4.41)代入方程(2.4.26), 可利用数值积分计算动相平面 (a, θ) 内的相轨迹。图 2.9 为同一激励频率对应多个响应幅值时的典型相轨迹曲线族。图中的三个奇点中, S_1, S_2 为稳定焦点, S_3 为鞍点, 过鞍点的分隔线划分出 S_1 或 S_2 的不同的吸引盆。

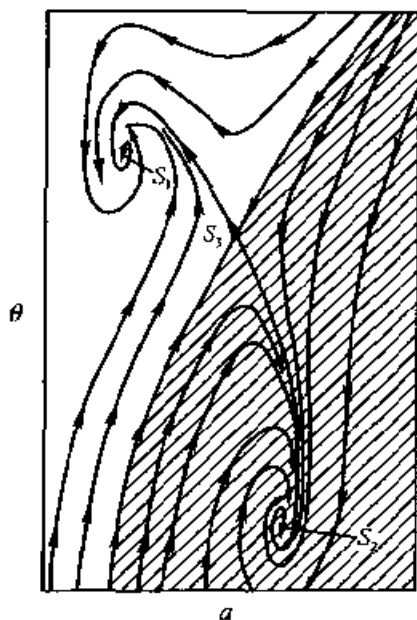


图 2.9 达芬系统受迫振动的动相平面相轨迹

2.4.6 分段线性系统

1. 分段线性系统的自由振动

对分段线性系统作定量计算时, 虽然利用分段的解析积分可以拼成精确解, 但如果精度要求仅限于 ε 的一次项, 则用平均法可以更简便地获得定量结果。图 2.10 所示的分段线性系统由质量块与弹簧 1 和带间隙的弹簧 2 组成。设物块的质量为 m , 弹簧 1 的刚度系数为 k_1 , 物块与弹簧 2 接触后二弹簧的总刚度系数为 k_2 , 间隙的宽度为 a_0 , 则系统的刚度以分段线性函数 $k(x)$ 表示(图 2.11):

$$k(x) = \begin{cases} k_1 x + (k_2 - k_1)(x + a_0) & (x < -a_0) \\ k_1 x & (-a_0 \leq x \leq a_0) \\ k_1 x + (k_2 - k_1)(x - a_0) & (x > a_0) \end{cases} \quad (2.4.44)$$

系统的自由振动微分方程为

$$m\ddot{x} + k(x) = 0 \quad (2.4.45)$$

引入参数 $\omega_0^2 = k_1/m$, $\varepsilon = (k_2/k_1) - 1$, 将方程(2.4.45)写为(2.4.1)形

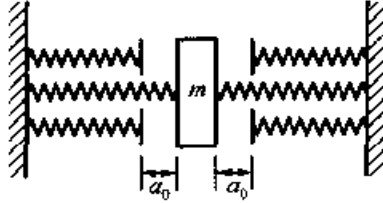


图 2.10 带间隙的弹簧-质量系统

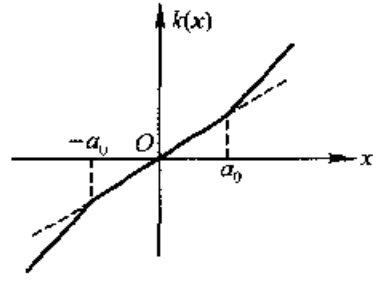


图 2.11 分段线性的刚度特性

式,其中

$$f(x, \dot{x}) = -\omega_0^2 g(x)$$

$$g(x) = \begin{cases} x + a_0 & (x < -a_0) \\ 0 & (-a_0 \leq x \leq a_0) \\ x - a_0 & (x > a_0) \end{cases} \quad (2.4.46)$$

令 $x = a \cos \psi$, $\psi = \omega_0 t - \theta$, $a_0 = a \cos \psi_0$, 代入式(2.4.46), 得到

$$g(a \cos \psi) = \begin{cases} a(\cos \psi + \cos \psi_0) & (\pi - \psi_0 < \psi < \pi + \psi_0) \\ 0 & (\psi_0 \leq \psi \leq \pi - \psi_0, \pi + \psi_0 \leq \psi \leq 2\pi - \psi_0) \\ a(\cos \psi - \cos \psi_0) & (0 < \psi < \psi_0, 2\pi - \psi_0 < \psi < 2\pi) \end{cases} \quad (2.4.47)$$

$a \leq a_0$ 时, 系统作频率为 ω_0 的自由振动。若 $a > a_0$, 将上式代入式(2.4.9), 分段进行积分, 得到

$$P(a, \theta) = -\frac{2\omega_0^2 a}{\pi} \left(\psi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\psi_0 \right), \quad Q(a, \theta) = 0 \quad (2.4.48)$$

将上式代入平均化方程(2.4.8), 得到

$$\dot{a} = 0, \quad \dot{\theta} = -\frac{\varepsilon \omega_0}{\pi} \left(\psi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\psi_0 \right) \quad (2.4.49)$$

令 $\alpha = a/a_0 = \sec \psi_0$, 则 $a > a_0$ 即 $\alpha > 1$ 时自由振动频率为 $\omega = \omega_0 - \dot{\theta}$, 导出

$$s = \frac{\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{\varepsilon}{\pi} G(\alpha) \quad (2.4.50)$$

其中函数 $G(\alpha)$ 定义为

$$G(\alpha) = \begin{cases} 1 & (\alpha \leq 1) \\ \arccos \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} & (\alpha > 1) \end{cases} \quad (2.4.51)$$

图 2.12 所示自由振动频率与振幅的关系曲线具有硬弹簧特性。

2. 分段线性系统的受迫振动

讨论此分段线性系统的受迫振动时, 设系统内有微弱阻尼, 其动力学方程为

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2[x + \epsilon g(x)] = \epsilon F_0 \cos \omega t \quad (2.4.52)$$

令 $\zeta = \epsilon\zeta_1$, $\omega^2 = \omega_0^2(1 + \epsilon\sigma_1)$, 写为式(2.4.15)的形式, 其中

$$f_1(x, \dot{x}, \omega t) = -2\zeta_1\omega_0\dot{x} - \omega_0^2[\sigma_1 x + g(x)] + F_0 \cos \omega t \quad (2.4.53)$$

令 $x = a \cos(\omega t - \theta)$, 代入式(2.4.24), 积分得到

$$\Phi(a, \omega) = 2\zeta_1\omega_0 a \omega, \quad \Psi(a, \omega) = \omega_0^2 a \left[\sigma_1 - \frac{2}{\pi} G(\alpha) \right] \quad (2.4.54)$$

函数 $G(\alpha)$ 的定义见式(2.4.51)。将式(2.4.54)代入式(2.4.27), (2.4.29), 令 $\epsilon F_0 = \omega_0^2 B$, 整理后得到与稳态周期运动对应的 a_s, θ_s 应满足的条件:

$$\alpha_s^2 \left\{ \left[1 - s^2 + \frac{2\epsilon}{\pi} G(\alpha_s) \right]^2 + (2\zeta_s)^2 \right\} = \left(\frac{B}{a_s} \right)^2 \quad (2.4.55)$$

$$\theta_s = \arctan \frac{2\zeta_s}{1 - s^2 + \frac{2\epsilon}{\pi} G(\alpha_s)} \quad (2.4.56)$$

其中 $\alpha_s = a_s / a_0$ 。幅频关系曲线见图 2.13, 是以图 2.12 中的自由振动频率特性曲线为骨架的曲线族。其中的虚线部分因满足 $(\partial W / \partial a) < 0$ 而证明为不稳定。因此与达芬系统类似, 此分段线性系统也可能产生跳跃现象。

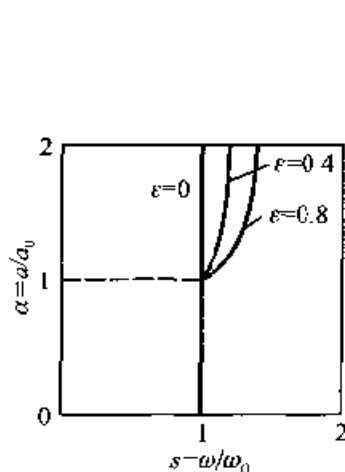


图 2.12 自由振动
频率与振幅关系

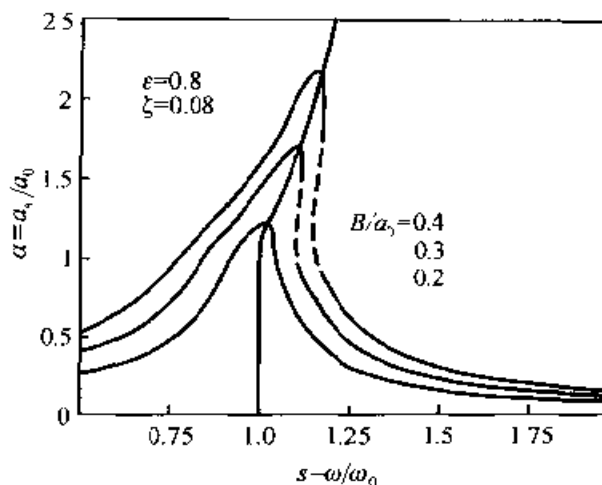


图 2.13 分段线性系统的幅频特性曲线

§ 2.5 多尺度法

2.5.1 多尺度法概述

上一节叙述的平均法是利用两种不同的时间尺度,将系统的振动分解为快变和慢变两种过程。将标志运动的主要参数,如振幅和初相角,在快变过程的每个周期内平均化,然后着重讨论其慢变过程。为了提高平均法的计算精度,可以将时间尺度划分得更为精细,由此发展为 20 世纪 60 年代的多尺度法。1957 年斯特罗克最早提出多时间尺度的概念,经过奈弗等人的发展和完善,成为一种十分有效的近似计算方法^[17]。与摄动法相比,多尺度法的明显优点是不仅能计算周期运动,而且能计算耗散系统的衰减振动;不仅能计算稳态响应,而且能计算非稳态过程;也可以分析稳态响应的稳定性,描绘非自治系统的全局运动性态。

为说明振动过程中不同时间尺度的存在,将林滋泰德-庞加莱法计算的达芬方程的自由振动解(2.3.15)中的频率 ω 以式(2.3.4)代入,得到

$$x = A \cos(\omega_0 t + \omega_1 \epsilon t + \omega_2 \epsilon^2 t + \cdots) - \frac{\epsilon A^3}{32} [\cos(\omega_0 t + \omega_1 \epsilon t + \omega_2 \epsilon^2 t + \cdots) -$$

$$\cos 3(\omega_0 t + \omega_1 \epsilon t + \omega_2 \epsilon^2 t + \cdots)] + \cdots \quad (2.5.1)$$

用上式表达的振动过程包含不同的时间尺度 $t, \epsilon t, \epsilon^2 t, \cdots$ 的时间历程。不同的时间尺度描述变化过程的不同节奏,阶数愈低,变化愈缓慢,阶数愈高,变化愈迅速。

引入表示不同尺度的时间变量

$$T_n = \epsilon^n t \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \quad (2.5.2)$$

则非线性振动过程为不同尺度时间变量的函数,可写为

$$x(t, \epsilon) = \sum_{n=0}^m \epsilon^n x_n(T_0, T_1, T_2, \cdots, T_m) \quad (2.5.3)$$

其中 m 为小参数的最高阶次,取决于计算的精度要求。将不同尺度的时间变量视为独立变量,则 $x(t, \epsilon)$ 成为 m 个独立时间变量的函数,对时间的微分可利用复合函数微分公式按 ϵ 的幂次展开,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \cdots + \epsilon^m \frac{\partial}{\partial T_m} \\ &= D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \cdots + \epsilon^m D_m \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \cdots + \epsilon^m \frac{\partial}{\partial T_m} \right) \\ &= (D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \cdots + \epsilon^m D_m)^2 \\ &= D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \cdots \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

其中 $D_n (n = 0, 1, 2, \cdots, m)$ 为偏微分算子符号,定义为

$$D_n \equiv \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, m) \quad (2.5.6)$$

将动力学方程中的微分运算以式(2.5.4)和(2.5.5)代入,变量 x 也按式(2.5.3)展开,代入动力学方程,比较同次幂系数,就得到各阶近似的线性偏微分方程组。在依次求解过程中,利用消除久期项的附加条件和初始条件,导出各阶近似解的确定表达式。

2.5.2 达芬系统的自由振动

令达芬方程(2.2.23)中的 $\omega_0^2 = 1$, 写为

$$\ddot{x} + x + \epsilon x^3 = 0 \quad (2.5.7)$$

只讨论二次近似解,令

$$x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \epsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2) \quad (2.5.8)$$

将上式及式(2.5.4)代入方程(2.5.7),

$$[D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2(D_1^2 + 2D_0 D_2)](x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2) + (x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2) + \epsilon(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2)^3 = 0 \quad (2.5.9)$$

展开后,令 ϵ 的同次幂系数为零,得到各阶近似的线性偏微分方程组:

$$D_0^2 x_0 + x_0 = 0 \quad (2.5.10a)$$

$$D_0^2 x_1 + x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - x_0^3 \quad (2.5.10b)$$

$$D_0^2 x_2 + x_2 = -2D_0 D_1 x_1 - D_1^2 x_0 - 2D_0 D_2 x_0 - 3x_0^2 x_1 \quad (2.5.10c)$$

将零次近似方程(2.5.10a)的解写为复数形式

$$x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + \bar{A}(T_1, T_2)e^{-iT_0} \quad (2.5.11)$$

其中 A 为待定的复函数, \bar{A} 为 A 的共轭复数。将式(2.5.11)代入一次近似方程(2.5.10b)的右边,得到

$$D_0^2 x_1 + x_1 = -(2iD_1 A + 3A^2 \bar{A})e^{iT_0} - A^3 e^{3iT_0} + cc \quad (2.5.12)$$

式中 cc 表示其左边各项的共轭复数。为避免久期项出现,函数 A 必须满足

$$2iD_1 A + 3A^2 \bar{A} = 0 \quad (2.5.13)$$

则从方程(2.5.12)解出

$$x_1 = -\frac{1}{8}A^3 e^{3iT_0} + cc \quad (2.5.14)$$

其中的振幅 A 随时间 T_1 的慢变规律由微分方程(2.5.13)确定。平均法中的方程(2.4.8a)若两边除以 ϵ ,即化为以 T_1 为自变量的微分方程。因此也可以将平均法理解为多尺度法的一次近似情形。

将式(2.5.11)和(2.5.14)代入二次近似方程(2.5.10c)的右边,得到

$$D_0^2 x_2 + x_2 = -\left(2iD_2 A - \frac{15}{8}A^3 \bar{A}^2\right)e^{iT_0} + \frac{21}{8}A^4 \bar{A}e^{3iT_0} - \frac{3}{8}A^5 e^{5iT_0} + cc \quad (2.5.15)$$

为消除久期项,要求

$$2iD_2 A - \frac{15}{8}A^3 \bar{A}^2 = 0 \quad (2.5.16)$$

从方程(2.5.15)解出

$$x_2 = -\frac{21}{64}A^4\bar{A}e^{3iT_0} + \frac{1}{64}A^5e^{5iT_0} + cc \quad (2.5.17)$$

微分方程(2.5.16)确定振幅 A 随 T_2 的变化规律。

将复函数 A 对 t 的导数写为

$$\frac{dA}{dt} = D_0A + \epsilon D_1A + \epsilon^2 D_2A \quad (2.5.18)$$

其中 $D_0A=0$, D_1A 和 D_2A 分别由条件(2.5.13)和(2.5.16)确定, 导出 A 应满足的常微分方程

$$\frac{dA}{dt} = \frac{3i\epsilon}{2}A^2\bar{A} - \frac{15i\epsilon^2}{16}A^3\bar{A}^2 \quad (2.5.19)$$

将复函数 A 写为指数形式:

$$A(t) = \frac{1}{2}a(t)e^{i\theta(t)} \quad (2.5.20)$$

其中 $a(t)$ 和 $\theta(t)$ 皆为 t 的实函数。代入方程(2.5.19), 将实部与虚部分开, 得到 a 和 θ 的一阶常微分方程组:

$$\dot{a} = 0 \quad (2.5.21a)$$

$$\dot{\theta} = \frac{3}{8}\epsilon a^2 - \frac{15}{256}\epsilon^2 a^4 \quad (2.5.21b)$$

积分此二方程, 得到

$$a = a_0 \quad (2.5.22a)$$

$$\theta = \left(\frac{3}{8}\epsilon a_0^2 - \frac{15}{256}\epsilon^2 a_0^4 \right)t + \theta_0 \quad (2.5.22b)$$

其中积分常数 a_0 和 θ_0 取决于初始条件。代入式(2.5.20), 得到

$$A = \frac{1}{2}a_0 e^{i\left(\frac{3}{8}\epsilon a_0^2 - \frac{15}{256}\epsilon^2 a_0^4\right)t + i\theta_0} \quad (2.5.23)$$

将上式代入式(2.5.11), (2.5.14)和(2.5.17), 最终得到达芬方程的二阶近似解:

$$x = a_0 \cos \psi + \frac{1}{32} \epsilon a_0^3 \cos 3\psi + \frac{1}{1024} \epsilon^2 a_0^5 (-21 \cos 3\psi + \cos 5\psi) \quad (2.5.24)$$

其中

$$\psi = \left(1 + \frac{3}{8} \epsilon a_0^2 - \frac{15}{256} \epsilon^2 a_0^4 \right) t + \theta_0 \quad (2.5.25)$$

2.5.3 达芬系统的受迫振动

讨论达芬系统接近共振的受迫振动。令达芬方程(2.3.17)和式(2.3.18)中 $\zeta = \epsilon \zeta_1$, $\omega_0^2 \sigma_1 = \sigma$, $\theta = 0$, 写为

$$\ddot{x} + 2\epsilon \zeta_1 \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 (x + \epsilon x^3) = \epsilon F_0 \cos \omega t \quad (2.5.26)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \epsilon \sigma \quad (2.5.27)$$

将式(2.5.27)代入方程(2.5.26), 化为

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \epsilon (F_0 \cos \omega t - 2\zeta_1 \omega_0 \dot{x} - \omega_0^2 x^3 + \sigma x) \quad (2.5.28)$$

只讨论一次近似解, 令

$$x = x_0(T_0, T_1) + \epsilon x_1(T_0, T_1) \quad (2.5.29)$$

代入方程(2.5.28), 展开后令两边 ϵ 的同次幂系数相等, 得到各阶近似方程:

$$D_0^2 x_0 + \omega^2 x_0 = 0 \quad (2.5.30a)$$

$$D_0^2 x_1 + \omega^2 x_1 = F_0 \cos \omega t - 2\zeta_1 \omega_0 D_0 \dot{x}_0 - \omega_0^2 x_0^3 + \sigma x_0 - 2D_0 D_1 x_0 \quad (2.5.30b)$$

将零次近似方程(2.5.30a)的解写为复数形式:

$$x_0 = A(T_1) e^{i\omega T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega T_0} \quad (2.5.31)$$

代入一次近似方程(2.5.30b)的右边, 得到

$$D_0^2 x_1 + \omega^2 x_1 = \left(\frac{1}{2} F_0 - 2i\zeta_1 \omega_0 \omega A - 3\omega_0^2 A^2 \bar{A} + \sigma A - 2i\omega D_1 A \right) e^{i\omega T_0} - \omega_0^2 A^3 e^{3i\omega T_0} + \text{cc} \quad (2.5.32)$$

为避免出现久期项,要求函数 A 满足

$$\frac{1}{2}F_0 - 2i\zeta_1\omega_0\omega A - 3\omega_0^2 A^2 A + \sigma A - 2i\omega D_1 A = 0 \quad (2.5.33)$$

则从方程(2.5.32)解出

$$x_1 = \frac{1}{8}A^3 e^{3i\omega T_0} + cc \quad (2.5.34)$$

列出函数 A 应满足的微分方程:

$$\frac{dA}{dt} = (D_0 + \epsilon D_1)A \quad (2.5.35)$$

其中 $D_0 A = 0$, $D_1 A$ 可从式(2.5.33)解出,化为

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{i\epsilon}{2\omega} \left(\frac{1}{2}F_0 - 2i\zeta_1\omega_0\omega A - 3\omega_0^2 A^2 \bar{A} + \sigma A \right) \quad (2.5.36)$$

将指数形式的复函数(2.5.20)代入方程(2.5.36),将实部与虚部分开,令 $\epsilon\zeta_1 = \zeta$, $\epsilon F_0 = \omega_0^2 B$,得到 a 和 θ 的一阶常微分方程:

$$\dot{a} = -\frac{\omega_0^2}{\omega} \left[2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) a + B \sin \theta \right] \quad (2.5.37a)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\omega_0^2}{2a\omega} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{3}{4}\epsilon a^2 \right] a - B \cos \theta \right\} \quad (2.5.37b)$$

此方程的非零常值特解 a_s, θ_s 对应于稳态周期运动。令 $\dot{a} = \dot{\theta} = 0$, $s = \omega/\omega_0$, 导出

$$2\zeta s = -\left(\frac{B}{a_s}\right) \sin \theta_s \quad (2.5.38a)$$

$$1 - s^2 + \frac{3}{4}\epsilon a_s^2 = \left(\frac{B}{a_s}\right) \cos \theta_s \quad (2.5.38b)$$

消去 θ_s 后,得到与用谐波平衡法或林滋泰德-庞加莱法导出的完全相同的幅频关系式(2.1.19)或(2.3.25),

$$\left(1 - s^2 + \frac{3}{4}\epsilon a_s^2 \right)^2 + (2\zeta s)^2 = \left(\frac{B}{a_s} \right)^2 \quad (2.5.39)$$

消去 B/a_s 后,导出与式(2.1.24)完全相同的相频关系式。

2.5.4 达芬系统的超谐波共振

以上所讨论的派生系统的固有频率 ω_0 接近激励频率 ω 时产生的共

振现象称为主共振。实践中还可观察到 ω_0 接近激励频率 ω 的整数倍或分数倍时出现的共振现象,分别称为超谐波共振和亚谐波共振,或统称为次共振。其中的亚谐波共振已在 § 2.3 中用小参数法作了初步的分析。本节利用多尺度法对次共振作更深入的讨论。

讨论带阻尼达芬系统的受迫振动。为叙述方便,将方程(2.5.26)中的 ϵF_0 以 F_0 代替,改用 $\mu = \zeta_1 \omega_0$ 表示阻尼系数,将非线性项的系数 $\epsilon \omega_0^2$ 以 $\epsilon \alpha$ 代替,写为

$$\ddot{x} + 2\epsilon\mu\dot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon\alpha x^3 = F_0 \cos \omega t \quad (2.5.40)$$

只讨论一次近似解,将式(2.5.29)代入方程(2.5.40),展开后令两边 ϵ 的同次幂系数相等,得到各阶近似方程:

$$D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = F_0 \cos \omega T_0 \quad (2.5.41a)$$

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - 2\mu D_0 x_0 - \alpha x_0^3 \quad (2.5.41b)$$

零次近似方程(2.5.41a)的解为

$$x_0 = A(T_1)e^{i\omega_0 T_0} + \Lambda e^{i\omega T_0} + cc \quad (2.5.42)$$

其中 A 为复数形式的自由振动振幅,而受迫振动振幅 Λ 为实数,

$$\Lambda = \frac{F_0}{2(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (2.5.43)$$

将零次近似解代入一次近似方程(2.5.41b),整理后得到

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = & -[2i\omega_0(D_1 A + \mu A) + 6\alpha A\Lambda^2 + 3\alpha A^2 \bar{A}]e^{i\omega_0 T_0} - \\ & \alpha[A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + \Lambda^3 e^{3i\omega T_0} + 3A^2 \Lambda e^{i(2\omega_0 + \omega)T_0} + \\ & 3\bar{A}^2 \Lambda e^{i(\omega - 2\omega_0)T_0} + 3A\Lambda^2 e^{3i(\omega_0 + 2\omega)T_0} + 3A\Lambda^2 e^{i(\omega_0 - 2\omega)T_0}] - \\ & \Lambda(-2i\mu\omega + 3\alpha\Lambda^2 + 6\alpha A\bar{A})e^{i\omega T_0} \end{aligned} \quad (2.5.44)$$

在此方程的右边各项中,不仅含 $e^{i\omega_0 T_0}$ 项可引起久期项,而且含 $e^{3i\omega T_0}$ 和 $e^{i(\omega - 2\omega_0)T_0}$ 项当 $3\omega = \omega_0$ 或 $\omega = 3\omega_0$ 时也能产生久期项。因此不仅在 $\omega_0 \approx \omega$ 时产生主共振,而且在 $\omega_0 \approx 3\omega$ 或 $\omega_0 \approx \omega/3$ 时也可能出现次共振现象,分别称为3次超谐波共振和1/3次亚谐波共振。

先讨论超谐波共振。设 ω_0 与 3ω 的差别为 ϵ 的同阶小量,写为

$$3\omega = \omega_0 + \epsilon\sigma \quad (2.5.45)$$

将上式代入方程(2.5.44)右边的 $e^{3i\omega_0 t}$, 令右边含 $e^{i\omega_0 T_0}$ 项的系数为零以消除久期项, 得到

$$2i\omega_0(D_1 A + \mu A) + 6\alpha A\Lambda^2 + 3\alpha A^2 A + \alpha\Lambda^3 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (2.5.46)$$

将 A 写为(2.5.20)的指数形式, 代入式(2.5.18)表示的 A 对 t 的导数, 其中的 $D_0 A = 0$, $D_1 A$ 由式(2.5.46)确定。将实部与虚部分开后, 得到 a 和 θ 的一阶常微分方程组:

$$\dot{a} = -\mu a - \frac{\alpha\Lambda^3}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \theta) \quad (2.5.47a)$$

$$a\dot{\theta} = \frac{\alpha}{\omega_0} \left[3a \left(\Lambda^2 + \frac{a^2}{8} \right) + \Lambda^3 \cos(\sigma T_1 - \theta) \right] \quad (2.5.47b)$$

令 $\gamma = \sigma T_1 - \theta$, 上式化为

$$\dot{a} = -\mu a - \frac{\alpha\Lambda^3}{\omega_0} \sin \gamma \quad (2.5.48a)$$

$$a\dot{\gamma} = \left[\sigma - \frac{3\alpha}{\omega_0} \left(\Lambda^2 + \frac{a^2}{8} \right) \right] a - \frac{\alpha\Lambda^3}{\omega_0} \cos \gamma \quad (2.5.48b)$$

此方程的非零常值解对应于系统的稳态周期运动。令 $\dot{a} = \dot{\gamma} = 0$, 导出 a , γ 的常值解 a_s, γ_s 应满足的条件:

$$\mu a_s = -\frac{\alpha\Lambda^3}{\omega_0} \sin \gamma_s \quad (2.5.49a)$$

$$\left[\sigma - \frac{3\alpha}{\omega_0} \left(\Lambda^2 + \frac{a_s^2}{8} \right) \right] a_s = \frac{\alpha\Lambda^3}{\omega_0} \cos \gamma_s \quad (2.5.49b)$$

令上式两边平方后相加消去 γ_s , 得到

$$\left[\mu^2 + \left(\sigma - \frac{3\alpha\Lambda^2}{\omega_0} - \frac{3\alpha a_s^2}{8\omega_0} \right)^2 \right] a_s^2 = \frac{\alpha^2 \Lambda^6}{\omega_0^2} \quad (2.5.50)$$

设 $a_s \neq 0$, 从上式解出

$$\sigma = \frac{3\alpha}{\omega_0} \left(\Lambda^2 + \frac{a_s^2}{8} \right) \pm \left(\frac{\alpha^2 \Lambda^6}{\omega_0^2 a_s^2} - \mu^2 \right)^{1/2} \quad (2.5.51)$$

可由此关系式看出, 当 $\omega_0 \approx 3\omega$ 时, 即使存在阻尼, 也满足关系式(2.5.51)的非零解 a_s 存在, 即 ω_0 频率的自由振动振幅 a_s 并不衰减为零。从而解释了超谐波共振现象。

利用式(2.5.50)计算 a_s 对 σ 的导数,令 $da_s/d\sigma=0$,导出振幅 a 的峰值:

$$a_{\max} = \frac{\alpha \Lambda^3}{\mu \omega_0} = \frac{\alpha}{\mu \omega_0} \left| \frac{F_0}{2(\omega_0^2 - \omega^2)} \right|^3 \quad (2.5.52)$$

与主共振情形不同,超谐波共振的峰值不仅与激励力的幅值和阻尼系数有关,而且是非线性项系数 α 的函数。由式(2.5.51)确定的幅频特性曲线如图 2.14 所示,由于曲线弯曲所引起的多值性,超谐波共振也存在与主共振类似的跳跃现象。

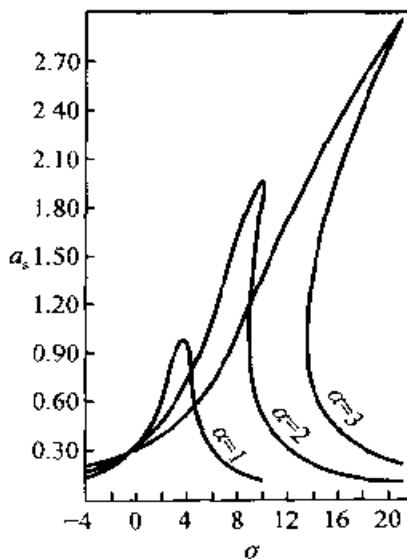


图 2.14 超谐波振动的幅频特性曲线

2.5.5 达芬系统的亚谐波共振

设 ω 与 $3\omega_0$ 的差别为 ε 的同阶小量,写为

$$\omega = 3\omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (2.5.53)$$

将上式代入方程(2.5.44)右边的 $e^{i(\omega-2\omega_0)T_0}$,令右边含 $e^{i\omega_0 T_0}$ 项的系数为零以消除久期项,得到

$$2i\omega_0(D_1 A + \mu A) + 6\alpha A \Lambda^2 + 3\alpha \Lambda^2 \bar{A} + 3\alpha \bar{A}^2 A e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (2.5.54)$$

由于 $\omega > \omega_0$,上式中的 Λ 为负实数。将 A 写为式(2.5.20)的指数形式,代入式(2.5.18)表示的 A 对 t 的导数,其中的 $D_0 A = 0$, $D_1 A$ 由式(2.5.54)确定。将实部与虚部分开后,得到 a 和 θ 的一阶常微分方程组:

$$\dot{a} = - \left[\mu + \frac{3\alpha\Lambda}{4\omega_0} a \sin(\sigma T_1 - 3\theta) \right] a \quad (2.5.55a)$$

$$\dot{\theta} = \frac{3\alpha}{\omega_0} \left[\Lambda^2 + \frac{a^2}{8} + \frac{\Lambda}{4} a \cos(\sigma T_1 - 3\theta) \right] \quad (2.5.55b)$$

令 $\gamma = \sigma T_1 - 3\theta$,上式化为

$$\dot{a} = - \left(\mu + \frac{3\alpha\Lambda}{4\omega_0} a \sin \gamma \right) a \quad (2.5.56a)$$

$$\dot{\gamma} = \sigma - \frac{9\alpha}{\omega_0} \left(\Lambda^2 + \frac{a^2}{8} + \frac{\Lambda}{4} a \cos \gamma \right) \quad (2.5.56b)$$

令 $\dot{a} = \dot{\gamma} = 0$, 导出 a, γ 的稳态值 a_s, γ_s 应满足的条件:

$$\mu = -\frac{3\alpha\Lambda}{4\omega_0} a_s \sin \gamma_s \quad (2.5.57a)$$

$$\sigma - \frac{9\alpha}{\omega_0} \left(\Lambda^2 + \frac{a_s^2}{8} \right) = \frac{9\alpha\Lambda}{4\omega_0} a_s \cos \gamma_s \quad (2.5.57b)$$

从上式中消去 γ_s , 得到

$$9\mu^2 + \left(\sigma - \frac{9\alpha\Lambda^2}{\omega_0} - \frac{9\alpha}{8\omega_0} a_s^2 \right)^2 = \frac{81\alpha^2\Lambda^2}{16\omega_0^2} a_s^2 \quad (2.5.58)$$

上式为 a^2 的二次代数方程, 可写为

$$a_s^4 - 2pa_s^2 + q = 0 \quad (2.5.59)$$

其中

$$p = \frac{8\omega_0\sigma}{9\alpha} - 6\Lambda^2, \quad q = \left(\frac{8\omega_0}{9\alpha} \right)^2 \left[9\mu^2 + \left(\sigma - \frac{9\alpha\Lambda^2}{\omega_0} \right)^2 \right] \quad (2.5.60)$$

解出

$$a_s^2 = p \pm \sqrt{p^2 - q} \quad (2.5.61)$$

由于 q 总是正数, 则 $p > 0, p^2 \geq q$ 为振幅 a_s 的实数解条件。此条件要求:

$$\Lambda^2 < \frac{4\omega_0\sigma}{27\alpha}, \quad \frac{\alpha\Lambda^2}{\omega_0} \left(\sigma - \frac{63\alpha\Lambda^2}{8\omega_0} \right) - 2\mu^2 \geq 0 \quad (2.5.62)$$

引入以下量纲一的参数:

$$\beta = \frac{\sigma}{\mu}, \quad \Gamma = \frac{63\alpha\Lambda^2}{4\omega_0\mu}$$

以上不等式可改写为

$$\Gamma < \frac{21}{9}\beta, \quad \Gamma^2 - 2\beta\Gamma + 63 \leq 0 \quad (2.5.63)$$

则对于给定的 σ 值, 振幅 a_s 的实数解条件归结为

$$\beta - (\beta^2 - 63)^{1/2} \leq \Gamma \leq \beta + (\beta^2 - 63)^{1/2} \quad (2.5.64)$$

根据上式可在 (β, Γ) 参数平面上画出 a_s 的实数解存在域, 即亚谐波共振的存在域。其边界曲线为

$$\Gamma = \beta \pm (\beta^2 - 63)^{1/2} \quad (2.5.65)$$

$\alpha > 0$ 时的边界曲线在图 2.15 中给出。在图中的实数解存在域内, 当激励频率 ω 接近 $3\omega_0$ 时, 系统可出现不衰减的 ω_0 频率的周期运动, 即亚谐波共振。但当 $\sigma = 0$, 即激励频率 ω 为准确的 $3\omega_0$ 时, 反而不能发生亚谐波共振。阻尼足够大时亚谐波共振也不可能发生。

对于无阻尼的特殊情形, 令式 (2.5.57a) 中 $\mu = 0$, 则 $\sin \gamma_s = 0$, 从式 (2.5.57b) 导出 a_s 的二次代数方程:

$$a_s^2 + 2\Lambda a_s + 8\left(\Lambda^2 - \frac{\omega_0 \sigma}{9\alpha}\right) = 0 \quad (2.5.66)$$

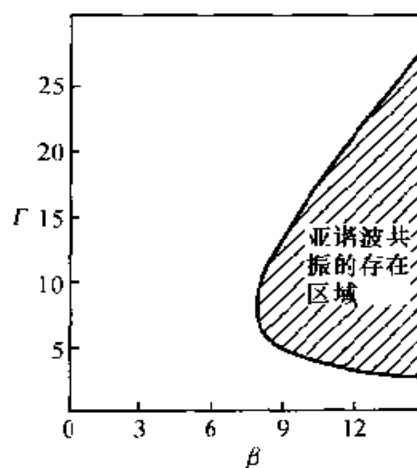


图 2.15 亚谐波共振的存在域

解出

$$a_s = -\Lambda \pm \sqrt{\frac{8\omega_0 \sigma}{9\alpha} - 7\Lambda^2} \quad (2.5.67)$$

采用 § 2.3 中的符号, 令上式中 $\alpha = 1$, $\Lambda = A/2$, $a = A_{1/3}$, $\sigma = 3\sigma_1/2\omega_0$, 则式 (2.5.66), (2.5.67) 与利用摄动法计算得到的式 (2.3.33b) 和 (2.3.34) 完全相同。

图 2.16 为根据式 (2.5.61), (2.5.67) 计算的幅频特性曲线。图中每条曲线均有两个分支, 因此同一激励频率对应于振幅的两个不同值。为判断亚谐波振动的稳定性, 引入扰动变量 $\xi = a - a_s$, $\eta = \gamma - \gamma_s$, 列出方

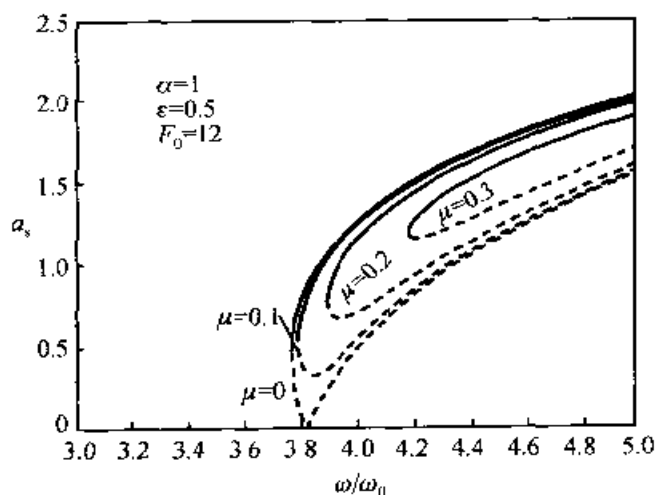


图 2.16 亚谐波共振的幅频特性曲线

程(2.5.56)在稳态值附近的一次近似方程:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} - \mu \xi + \left(\frac{3\alpha a_s^2}{4\omega_0} \Lambda \cos \gamma_s \right) \eta &= 0 \\ \dot{\eta} + \frac{9\alpha}{4\omega_0} (a_s + \Lambda \cos \gamma_s) \xi + 3\mu \eta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5.68)$$

此线性扰动方程的本征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda - \mu & \frac{3\alpha a_s^2}{4\omega_0} \Lambda \cos \gamma_s \\ \frac{9\alpha}{4\omega_0} (a_s + \Lambda \cos \gamma_s) & \lambda + 3\mu \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\mu\lambda + b = 0 \quad (2.5.69)$$

上式中的常数 b 可利用式(2.5.57), (2.5.60)化为

$$b = \frac{3}{2} \left(\frac{3\alpha a_s^2}{4\omega_0} \right)^2 (a_s^2 - p) \quad (2.5.70)$$

根据李雅普诺夫的一次近似稳定性判据, 由于 $\mu > 0$, 则稳态解 a_s, γ_s 为渐近稳定的充分条件为 $b > 0$ 。此稳定性条件可利用式(2.5.70)化为

$$a_s^2 > p \quad (2.5.71)$$

与 a_s^2 应满足的式(2.5.61)相对照, 不难看出, 在幅频特性曲线的两个分支中, 幅值大的一支稳定, 幅值小的一支不稳定。在图 2.16 中分别以实线和虚线表示稳定和不稳定。

对方程组(2.5.55)作数值积分, 可作出动相平面内的相轨迹。典型的相轨迹曲线族如图 2.17 所示。图中 S_1 为稳定焦点, S_2 为鞍点, 阴影区为 S_1 的吸引盆, 即可能出现亚谐波共振的区域。

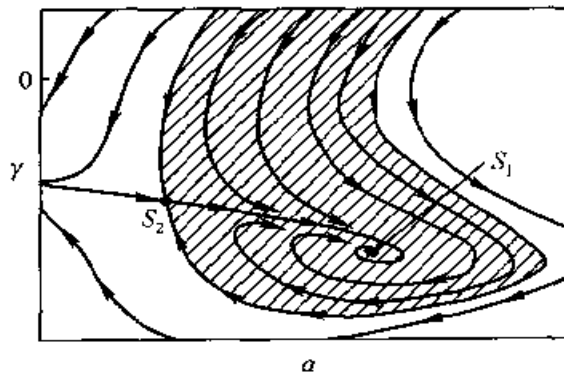


图 2.17 亚谐波共振的动相平面相轨迹

稳定的亚谐波共振的存在表明:机械系统也能被远大于固有频率的激励力激起强烈的共振。例如有记载称:一架飞机被螺旋桨激起机翼的 $1/2$ 阶亚谐波共振,机翼的振动又激起舵面的 $1/4$ 阶亚谐波共振而导致破坏。

§ 2.6 渐 近 法

2.6.1 渐近方程组

将平均法与摄动法比较,其突出优点是可以避免摄动法的许多繁琐的中间运算,而直接迅速地获得结果。缺点是精度仅限于与 ε 同阶的一次近似,因此只限于定性研究,不能满足高精度定量计算的要求,而摄动法的特点是能满足任意精度要求。上一节叙述的多尺度法通过将时间尺度划分得更为精细来提高近似解的精度。但也可通过另一种途径达到提高精度的目的,即将平均法与摄动法相结合形成一种新方法,称为渐近法。1937年克雷洛夫和包戈留包夫最先提出渐近法的思想,以后包戈留包夫和米特罗波夫斯基给出了严密的数学证明并加以推广,因此也称为克雷洛夫-包戈留包夫-米特罗波夫斯基方法,或简称 **KBM 法**^[4,6]

讨论自治的弱非线性系统,其动力学方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (2.6.1)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时,派生系统为线性系统,它的解是简谐函数表示的自由振动,可写为

$$x = a \cos \psi \quad (2.6.2)$$

其中振幅 a 为常值,相角 ψ 匀速变化,即

$$\dot{a} = 0, \dot{\psi} = \omega_0 \quad (2.6.3)$$

当 $\varepsilon \neq 0$ 但充分小时,方程(2.6.1)右边摄动项的存在使原系统的解中除频率为 ω_0 的主谐波之外,还含有微小的高次谐波,且振幅与频率均与小参数 ε 有关而缓慢变化。因此可以对弱非线性系统构造出以下级数形式的解:

$$x = a \cos \psi + \varepsilon x_1(a, \psi) + \varepsilon^2 x_2(a, \psi) + \cdots \quad (2.6.4)$$

其中 $x_1(a, \psi)$, $x_2(a, \psi)$, \cdots 均为 ψ 的以 2π 为周期的周期函数,而 a 和 ψ 是时间的慢变函数,由以下微分方程确定:

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \cdots \\ \dot{\psi} &= \omega_0 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (2.6.5)$$

不难看出,此方程的一次近似正是平均法的基本方程(2.4.8),而渐近法在平均法的基础上增加了 ε 的高次项部分。根据庞加莱的理论,若弱非线性系统的周期解对 ε 是解析的,幂级数(2.6.4)和(2.6.5)必收敛。但在实际计算时幂级数的收敛性并不重要,我们所关心的只是当 ε 充分小时,取级数解的前 m 项为近似解,能否在足够长的时间范围内与精确解相接近。

将式(2.6.4)对 t 微分,整理后得到

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{a} \left(\cos \psi + \varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial a} + \cdots \right) + \\ &\quad \dot{\psi} \left(-a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial \psi} + \cdots \right) \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

再微分一次,得到

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{a} \left(\cos \psi + \varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial a} + \cdots \right) + \\ &\quad \ddot{\psi} \left(-a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial \psi} + \cdots \right) - \\ &\quad \dot{a}^2 \left(\varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial a^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial a^2} + \cdots \right) + \\ &\quad 2\dot{a}\dot{\psi} \left(-\sin \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial a \partial \psi} + \cdots \right) + \\ &\quad \dot{\psi}^2 \left(-a \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi^2} + \cdots \right) \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

将方程(2.6.5)也对 t 微分,得到

$$\ddot{a} = \varepsilon^2 A_1 \frac{dA_1}{da} + \cdots, \quad \ddot{\psi} = \varepsilon^2 A_1 \frac{d\omega_1}{da} + \cdots \quad (2.6.8)$$

将式(2.6.5)和(2.6.8)代入式(2.6.6)和(2.6.7),整理得到

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a\omega_0 \sin \psi + \varepsilon \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega_0 \frac{\partial x_1}{\partial \psi} \right) + \\ &\quad \varepsilon^2 \left(A_2 \cos \psi - aB_2 \sin \psi + A_1 \frac{\partial x_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial x_1}{\partial \psi} + \omega_0 \frac{\partial x_2}{\partial \psi} \right) + \cdots \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

$$\ddot{x} = -a\omega_0^2 \cos \psi + \varepsilon \left(-2\omega_0 A_1 \sin \psi - 2a\omega_0 B_1 \cos \psi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} \right) +$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \left[\left(A_1 \frac{dA_1}{da} - aB_1^2 - 2a\omega_0 B_2 \right) \cos \psi - \right. \\ & \left. \left(aA_1 \frac{dB_1}{da} + 2\omega_0 A_2 + 2A_1 B_1 \right) \sin \psi + \right. \\ & \left. 2\omega_0 A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial \psi} + 2\omega_0 B_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi^2} \right] + \dots \quad (2.6.10) \end{aligned}$$

将式(2.6.4)和(2.6.10)代入原系统的方程(2.6.1)的左边,整理后得到

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x = & \varepsilon \left[\omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 \right) - 2\omega_0 A_1 \sin \psi - 2\omega_0 a B_1 \cos \psi \right] + \\ & \varepsilon^2 \left[\omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi^2} + x_2 \right) + \left(A_1 \frac{dA_1}{da} - aB_1^2 - 2\omega_0 a B_2 \right) \cos \psi - \right. \\ & \left. \left(2\omega_0 A_2 + 2A_1 B_1 + aA_1 \frac{dB_1}{da} \right) \sin \psi + 2\omega_0 A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial \psi} + \right. \\ & \left. 2\omega_0 B_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} \right] + \dots \quad (2.6.11) \end{aligned}$$

将方程(2.6.1)的右边在 $x_0 = a \cos \psi$, $\dot{x}_0 = -a\omega_0 \sin \psi$ 附近展成泰勒级数,并利用式(2.6.4)和(2.6.9),整理后得到

$$\begin{aligned} \varepsilon f(x, \dot{x}) = & \varepsilon f(x_0, \dot{x}_0) + \varepsilon^2 \left[x_1 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x} + \right. \\ & \left. \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega_0 \frac{\partial x_1}{\partial \psi} \right) \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}} \right] + \dots \quad (2.6.12) \end{aligned}$$

令式(2.6.11)和(2.6.12)相等,并令 ε 的同次幂的系数相等,得到以下渐近方程组:

$$\omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 \right) = f_0(a, \psi) + 2\omega_0 A_1 \sin \psi + 2\omega_0 a B_1 \cos \psi \quad (2.6.13a)$$

$$\omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi^2} + x_2 \right) = f_1(a, \psi) + 2\omega_0 A_2 \sin \psi + 2\omega_0 a B_2 \cos \psi \quad (2.6.13b)$$

.....

其中

$$f_0(a, \psi) = f(x_0, \dot{x}_0) \quad (2.6.14a)$$

$$\begin{aligned}
 f_1(a, \psi) = & x_1 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x} + \left(A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \omega_0 \frac{\partial x_1}{\partial \psi} \right) \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}} + \\
 & \left(a B_1^2 - A_1 \frac{dA_1}{da} \right) \cos \psi + \left(2A_1 B_1 + a A_1 \frac{dB_1}{da} \right) \sin \psi - \\
 & 2\omega_0 A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial \psi} - 2\omega_0 B_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2}
 \end{aligned} \quad (2.6.14b)$$

2.6.2 渐近解

在一次近似方程(2.6.13a)中, $f_0(a, \psi)$ 是 ψ 的周期为 2π 的函数, 可展成傅里叶级数

$$f_0(a, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_{0n} \cos n\psi + g_{0n} \sin n\psi) \quad (2.6.15)$$

为使 $a \cos \psi$ 包含周期解的全部一次谐波, $x_1(a, \psi)$ 的傅里叶级数展开式内不得含有一次谐波成分, 以避免久期项出现, 即

$$x_1(a, \psi) = \sum_{n=2}^{\infty} (a_{1n} \cos n\psi + b_{1n} \sin n\psi) \quad (2.6.16)$$

将式(2.6.15)和(2.6.16)代入方程(2.6.13a), 令两边同次谐波的系数相等, 可求出

$$\left. \begin{aligned}
 a_{1n} &= \frac{f_{0n}}{\omega_0^2(1-n^2)}, \quad b_{1n} = \frac{g_{0n}}{\omega_0^2(1-n^2)} \quad (n=2, 3, \dots) \\
 A_1 &= -\frac{g_{01}}{2\omega_0}, \quad B_1 = -\frac{f_{01}}{2\omega_0 a}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.6.17)$$

从而完全确定一次近似解 $A_1(a)$, $B_1(a)$ 和 $x_1(a, \psi)$ 。将所导出的 A_1 和 B_1 代入方程(2.6.5), 与平均法的简化方程(2.4.8)对照, 令 $g_{01} = Q$, $f_{01} = -P$, 则完全一致, 这表明平均法是渐近法的一次近似特例。

将导出的 A_1 , B_1 和 x_1 代入式(2.6.14b), 则 $f_1(a, \psi)$ 也可展成周期为 2π 的傅里叶级数:

$$f_1(a, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_{1n} \cos n\psi + g_{1n} \sin n\psi) \quad (2.6.18)$$

将 $x_2(a, \psi)$ 展成不含一次谐波的傅里叶级数:

$$x_2(a, \psi) = \sum_{n=2}^{\infty} (a_{2n} \cos n\psi + b_{2n} \sin n\psi) \quad (2.6.19)$$

将式(2.6.18)和(2.6.19)代入方程(2.6.13b), 令两边同次谐波的系数相等, 可求出

$$\left. \begin{aligned} a_{2n} &= \frac{f_{1n}}{\omega_0^2(1-n^2)}, \quad b_{2n} = \frac{g_{1n}}{\omega_0^2(1-n^2)} \quad (n=2, 3, \dots) \\ A_2 &= -\frac{g_{11}}{2\omega_0}, \quad B_2 = -\frac{f_{11}}{2\omega_0 a} \end{aligned} \right\} \quad (2.6.20)$$

则二次近似解 $A_2(a)$, $B_2(a)$ 和 $x_2(a, \psi)$ 完全确定。用同样方法继续计算, 可渐近地求出满足所需精度的解。

例 2.6-1 分析达芬系统的自由振动。

解: 达芬系统的自由振动微分方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + \epsilon x^3) = 0 \quad (a)$$

$$\text{即} \quad f(x, \dot{x}) = -\omega_0^2 x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -3\omega_0^2 x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (b)$$

将 $x = a \cos \psi$ 代入式(2.6.14a), 整理后得到

$$f_0(a, \psi) = -\frac{\omega_0^2 a^3}{4} (3 \cos \psi + \cos 3\psi) \quad (c)$$

代入方程(2.6.13a),

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 \right) &= 2\omega_0 A_1 \sin \psi + \left(2\omega_0 B_1 - \frac{3\omega_0^2 a^2}{4} \right) a \cos \psi - \\ &\quad \frac{\omega_0^2 a^3}{4} \cos 3\psi \end{aligned} \quad (d)$$

周期解条件要求

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \frac{3\omega_0 a^3}{8} \quad (e)$$

解出

$$x_1 = \frac{a^3}{32} \cos 3\psi \quad (f)$$

将上式代入式(2.6.14b), 整理后得到

$$f_1(a, \psi) = \frac{15}{128} \omega_0^2 a^5 \cos \psi + \frac{21}{128} \omega_0^2 a^5 \cos 3\psi - \frac{3}{128} \omega_0^2 a^5 \cos 5\psi \quad (g)$$

代入方程(2.6.13b), 得到

$$\omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi^2} + x_2 \right) = 2\omega_0 A_2 \sin \psi + \left(2B_2 + \frac{15}{128} \omega_0 a^4 \right) \omega_0 a \cos \psi + \frac{21}{128} \omega_0^2 a^5 \cos 3\psi - \frac{3}{128} \omega_0^2 a^5 \cos 5\psi \quad (h)$$

周期解条件要求

$$A_2 = 0, \quad B_2 = -\frac{15\omega_0 a^4}{256} \quad (i)$$

解出

$$x_2 = \frac{a^5}{1024} (-21 \cos 3\psi + \cos 5\psi) \quad (j)$$

如此继续计算, 最终得到满足精度要求的解

$$x = a \cos \psi + \frac{\epsilon a^3}{32} \left(1 - \frac{21\epsilon a^2}{32} \right) \cos 3\psi + \frac{\epsilon^2 a^5}{1024} \cos 5\psi - \dots \quad (k)$$

$$\dot{x} = 0 + \dots \quad (l)$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 \left(1 + \frac{3\epsilon a^2}{8} - \frac{15\epsilon^2 a^4}{256} + \dots \right) \quad (m)$$

将式(k)与式(2.3.15)比较, 得到

$$a = A - \frac{\epsilon A^3}{32} + \dots \quad (n)$$

代入式(m), 令两边平方, 得到

$$\dot{\psi}^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{3\epsilon A^2}{4} - \frac{3\epsilon^2 A^4}{128} + \dots \right) \quad (o)$$

与式(2.3.16)完全一致

2.6.3 远离共振的受迫振动

讨论受周期激励的弱非线性系统:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon f(x, \dot{x}, \omega t) \quad (2.6.21)$$

激励项 $f(x, \dot{x}, \omega t)$ 是 ωt 的周期为 2π 的函数, 可对 ωt 展成傅里叶级数

$$f(x, \dot{x}, \omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x, \dot{x}) e^{in\omega t} \quad (2.6.22)$$

当 $\epsilon = 0$ 时, 派生系统的振动是以 ω_0 为频率的自由振动, 其零次近似解如式(2.4.3)和(2.4.4)

$$x = a \cos \psi, \dot{x} = -a\omega_0 \sin \psi, \psi = \omega_0 t - \theta \quad (2.6.23)$$

若将零次近似解(2.6.23)代入式(2.6.22), 则 $f_n(x, \dot{x})$ 的傅里叶级数必含有 $e^{im\omega_0 t}$ 项。因此方程(2.6.21)的右边的展开式中必含有组合频率为 $(m\omega_0 + n\omega)$ 的简谐分量, 其中 n 和 m 为任意整数。当组合频率中的任何一个接近派生系统的固有频率 ω_0 时, 即使振幅很小, 也可能激起显著的振动。因此弱非线性系统可能在满足下列条件时发生共振:

$$\omega_0 \approx \frac{k}{l} \omega \quad (2.6.24)$$

其中 k, l 为互质的整数。因此弱非线性系统的共振通常有以下三种类型:

- (1) $k = l = 1, \omega_0 \approx \omega$: 固有频率 ω_0 接近激励频率 ω , 即主共振;
- (2) $k = 1, \omega_0 \approx \omega/l$: 固有频率 ω_0 接近激励频率 ω 的分数倍, 即亚谐波共振;
- (3) $l = 1, \omega_0 \approx k\omega$: 固有频率 ω_0 接近激励频率 ω 的整数倍, 即超谐波共振。

三种类型的共振均已在前面章节中作过讨论。此处应用渐近法, 先讨论远离共振的受迫振动, 即 ω_0 与任何 $(m\omega_0 + n\omega)$ 均不接近的情形。考虑到渐近解中必须包含激励频率的谐波, 应将式(2.6.4)改为

$$x = a \cos \psi + \epsilon x_1(a, \psi, \omega t) + \epsilon^2 x_2(a, \psi, \omega t) + \dots \quad (2.6.25)$$

方程(2.6.5)的形式不变,

$$\dot{a} = \epsilon A_1(a) + \epsilon^2 A_2(a) + \dots \quad (2.6.26)$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 + \epsilon B_1(a) + \epsilon^2 B_2(a) + \dots \quad (2.6.27)$$

将方程(2.6.25)对 t 微分, 整理后得到

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \dot{a} \left(\cos \psi + \epsilon \frac{\partial x_1}{\partial a} + \epsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial a} + \dots \right) + \\ & \dot{\psi} \left(-a \sin \psi + \epsilon \frac{\partial x_1}{\partial \psi} + \epsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial \psi} + \dots \right) + \epsilon \frac{\partial x_1}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \dots \end{aligned} \quad (2.6.28)$$

$$\ddot{x} = \ddot{a} \left(\cos \psi + \epsilon \frac{\partial x_1}{\partial a} + \epsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial a} + \dots \right) +$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\psi} \left(-a \sin \psi + \epsilon \frac{\partial x_1}{\partial \psi} + \epsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial \psi} + \dots \right) + \\
& \ddot{a}^2 \left(\epsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial a^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial a^2} + \dots \right) + \\
& 2\dot{a}\dot{\psi} \left(-\sin \psi + \epsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial \psi} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial a \partial \psi} + \dots \right) + \\
& \dot{\psi}^2 \left(-a \cos \psi + \epsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi^2} + \dots \right) + \\
& 2\dot{a} \left(\epsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial a \partial t} \right) + 2\dot{\psi} \left(\epsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi \partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi \partial t} \right) + \\
& \epsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \dots \quad (2.6.29)
\end{aligned}$$

将方程(2.6.26)和(2.6.27)也对 t 微分, 得到与式(2.6.8)相同的结果。
将各式代入方程(2.6.21)的左边, 整理后得到

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + \omega_0^2 x = & \epsilon \left[\omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 \right) + 2\omega_0 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi \partial t} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} - \right. \\
& \left. 2\omega_0 (A_1 \sin \psi + aB_1 \cos \psi) \right] + \epsilon^2 \left[\omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi^2} + x_2 \right) + \right. \\
& 2\omega_0 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi \partial t} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} - \left(2\omega_0 A_2 + 2A_1 B_1 + aA_1 \frac{dB_1}{da} \right) \sin \psi - \\
& \left(2\omega_0 aB_2 + aB_1^2 - A_1 \frac{dA_1}{da} \right) \cos \psi + 2\omega_0 A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial \psi} + \\
& \left. 2\omega_0 B_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + 2A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial t} + 2B_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi \partial t} \right] + \dots \quad (2.6.30)
\end{aligned}$$

将方程(2.6.1)的右边在 $x_0 = a \cos \psi$, $\dot{x}_0 = -a\omega_0 \sin \psi$ 附近展成泰勒级数, 并将式(2.6.25)和(2.6.28)代入, 整理后得到

$$\begin{aligned}
\epsilon f(x, \dot{x}, \omega t) = & \epsilon f(x_0, \dot{x}_0, \omega t) + \epsilon^2 \left[x_1 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0, \omega t)}{\partial x} + \right. \\
& \left. \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega_0 \frac{\partial x_1}{\partial \psi} + \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0, \omega t)}{\partial \dot{x}} \right] + \dots \quad (2.6.31)
\end{aligned}$$

令式(2.6.30)和(2.6.31)相等,并令 ϵ 的同次幂的系数相等,得到以下渐近方程组:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 \right) + 2\omega_0 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi \partial t} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = f_0(a, \psi, \omega t) + \\ 2\omega_0 A_1 \sin \psi + 2\omega_0 a B_1 \cos \psi \end{aligned} \quad (2.6.32a)$$

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi^2} + x_2 \right) + 2\omega_0 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi \partial t} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = f_1(a, \psi, \omega t) + \\ 2\omega_0 A_2 \sin \psi + 2\omega_0 a B_2 \cos \psi \end{aligned} \quad (2.6.32b)$$

.....

其中

$$f_0(a, \psi, \omega t) = f(x_0, \dot{x}_0, \omega t) \quad (2.6.33)$$

$$\begin{aligned} f_1(a, \psi, \omega t) = x_1 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0, \omega t)}{\partial x} + \left(A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \right. \\ \left. \omega_0 \frac{\partial x_1}{\partial \psi} + \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0, \omega t)}{\partial \dot{x}} + \left(a B_1^2 - A_1 \frac{dA_1}{da} \right) \cos \psi + \\ \left(2A_1 B_1 + a A_1 \frac{dB_1}{da} \right) \sin \psi - 2\omega_0 A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial \psi} - 2\omega_0 B_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} - \\ 2A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial t} - 2B_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi \partial t} \end{aligned} \quad (2.6.34)$$

.....

例 2.6-2 分析达芬系统的受迫振动。

解: 设达芬系统受到较弱的简谐力激励,动力学方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + \epsilon x^3) = \epsilon F_0 \cos \omega t \quad (a)$$

改写为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= \epsilon f(x, \dot{x}, \omega t) \\ f(x, \dot{x}, \omega t) &= F_0 \cos \omega t - \omega_0^2 x^3 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

将 $x_0 = a \cos \psi$ 代入式(2.6.33), 得到

$$f_0(a, \psi, \omega t) = F_0 \cos \omega t - \frac{1}{4} \omega_0^2 a^3 (3 \cos \psi + \cos 3\psi) \quad (c)$$

代入方程(2.6.32a), 整理后得到

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 \right) + 2\omega_0 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi \partial t} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = F_0 \cos \omega t + \\ 2\omega_0 A_1 \sin \psi + \left(2\omega_0 a B_1 - \frac{3}{4} \omega_0^2 a^3 \right) \cos \psi - \frac{1}{4} \omega_0^2 a^3 \cos 3\psi \end{aligned} \quad (d)$$

为避免此方程的解出现久期项, 必须令

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \frac{3}{8} \omega_0 a^2 \quad (e)$$

代入式(2.6.26)和(2.6.27), 得到

$$\dot{a} = 0, \quad \dot{\psi} = \omega_0 \left(1 + \frac{3}{8} \epsilon a^2 \right) \quad (f)$$

从方程(d)积分得到

$$x_1 = \frac{1}{32} a^3 \cos 3\psi + \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (g)$$

代入式(2.6.25), 得到受迫振动规律:

$$x = a \cos \psi + \frac{1}{32} \epsilon a^3 \cos 3\psi + \frac{\epsilon F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (h)$$

其中 a 为常值, 固有频率 $\dot{\psi}$ 由式(f)给出, 其平方为

$$\dot{\psi}^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \epsilon a^2 + \dots \right) \quad (i)$$

与用林滋泰德-庞加莱法计算得到的式(2.3.16)一致。

2.6.4 接近共振的受迫振动

前面已说明, 若派生系统的固有频率与激励频率之间满足条件(2.6.24)时, 即可能发生某种形式的共振。设固有频率 ω_0 充分接近 $\lambda\omega$, $\lambda = k/l$ 为互质的整数之比,

$$\omega_0^2 = (\lambda\omega)^2 - \epsilon\sigma \quad (2.6.35)$$

则方程(2.6.21)改写为

$$\ddot{x} + (\lambda\omega)^2 x = \epsilon [f(x, \dot{x}, \omega t) + \sigma x] \quad (2.6.36)$$

此方程的渐近解仍写为(2.6.25)形式,

$$x = a \cos \psi + \epsilon x_1(a, \psi, \omega t) + \epsilon^2 x_2(a, \psi, \omega t) + \dots \quad (2.6.37)$$

设 θ 为固有频率的振动与激励之间的相位差,

$$\theta = \psi - \lambda \omega t \quad (2.6.38)$$

在接近共振情况下, 相位差 θ 对振幅和频率的变化有重要影响, 因此可将 a 和 ψ 的微分方程写为

$$\dot{a} = \epsilon A_1(a, \theta) + \epsilon^2 A_2(a, \theta) + \dots \quad (2.6.39)$$

$$\dot{\psi} = \lambda \omega + \epsilon B_1(a, \theta) + \epsilon^2 B_2(a, \theta) + \dots \quad (2.6.40)$$

利用式(2.6.38), 方程(2.6.40)也可写为

$$\dot{\theta} = \epsilon B_1(a, \theta) + \epsilon^2 B_2(a, \theta) + \dots \quad (2.6.41)$$

将级数形式解(2.6.37)对 t 微分, 整理后得到

$$\begin{aligned} \dot{x} = \dot{a} \left(\cos \psi + \epsilon \frac{\partial x_1}{\partial a} + \epsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial a} + \dots \right) + \dot{\theta} \left(-a \sin \psi + \epsilon \frac{\partial x_1}{\partial \theta} + \right. \\ \left. \epsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial \theta} + \dots \right) - \lambda \omega a \sin \psi + \epsilon \frac{\partial x_1}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \dots \end{aligned} \quad (2.6.42)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} = \ddot{a} \left(\cos \psi + \epsilon \frac{\partial x_1}{\partial a} + \epsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial a} + \dots \right) + \ddot{\theta} \left(-a \sin \psi + \epsilon \frac{\partial x_1}{\partial \theta} + \right. \\ \left. \epsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial \theta} + \dots \right) + \dot{a}^2 \left(\epsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial a^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial a^2} + \dots \right) + 2\dot{a}\dot{\theta} \left(-\sin \psi + \right. \\ \left. \epsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial \theta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial a \partial \theta} + \dots \right) + \dot{\theta}^2 \left(-a \cos \psi + \epsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial \theta^2} + \right. \\ \left. \epsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \theta^2} + \dots \right) + 2\dot{a} \left(-\lambda \omega \sin \psi + \epsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial a \partial t} + \dots \right) + \\ 2\dot{\theta} \left(-a \lambda \omega \cos \psi + \epsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial \theta \partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \theta \partial t} + \dots \right) - a(\lambda \omega)^2 \cos \psi + \\ \epsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \dots \end{aligned} \quad (2.6.43)$$

将方程(2.6.39)和(2.6.41)对 t 微分, 得到

$$\left. \begin{aligned} \ddot{a} &= \epsilon^2 \left(A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right) + \dots \\ \ddot{\theta} &= \epsilon^2 \left(A_1 \frac{\partial B_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} \right) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.6.44)$$

将式(2.6.39), (2.6.41)和(2.6.44)代入式(2.6.43), 再代入方程(2.6.36)的左边, 整理后得到

$$\ddot{x} + (\lambda \omega)^2 x = \epsilon \left[\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + (\lambda \omega)^2 x_1 - 2\lambda \omega (A_1 \sin \psi + a B_1 \cos \psi) \right] +$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \left[\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + (\lambda\omega)^2 x_2 - \left(2\lambda\omega A_2 + 2A_1 B_1 + aA_1 \frac{\partial B_1}{\partial a} + \right. \right. \\ \left. \left. aB_1 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} \right) \sin \psi - \left(2\lambda\omega a B_2 + aB_1^2 - A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} - \right. \right. \\ \left. \left. B_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right) \cos \psi + 2A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial t} + 2B_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \theta \partial t} \right] + \dots \quad (2.6.45) \end{aligned}$$

将方程(2.6.36)的右边在 $x_0 = a \cos \psi$, $\dot{x}_0 = -a\lambda\omega \sin \psi$ 附近展成泰勒级数, 并利用式(2.6.37)和(2.6.42)整理后得到

$$\begin{aligned} \epsilon [f(x, \dot{x}, \omega t) + \sigma x] = \epsilon [f(x_0, \dot{x}_0, \omega t) + \sigma a \cos \psi] + \\ \epsilon^2 \left[x_1 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0, \omega t)}{\partial x} + \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0, \omega t)}{\partial \dot{x}} + \sigma x_1 \right] + \dots \quad (2.6.46) \end{aligned}$$

令式(2.6.45)和(2.6.46)相等, 并令 ϵ 的同次幂的系数相等, 得到以下渐近方程组:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + (\lambda\omega)^2 x_1 = f_0(a, \psi, \omega t) + 2\lambda\omega A_1 \sin \psi + 2a\lambda\omega B_1 \cos \psi \quad (2.6.47a)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + (\lambda\omega)^2 x_2 = f_1(a, \psi, \omega t) + 2\lambda\omega A_2 \sin \psi + 2a\lambda\omega B_2 \cos \psi \quad (2.6.47b)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} f_0(a, \psi, \omega t) &= f(x_0, \dot{x}_0, \omega t) + \sigma x_0 \\ f_1(a, \psi, \omega t) &= x_1 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0, \omega t)}{\partial x} + \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0, \omega t)}{\partial \dot{x}} - 2A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial t} - 2B_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \theta \partial t} + \sigma x_1 \\ &\quad \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.6.48)$$

例 2.6-3 分析达芬系统的主共振。

解: 设有阻尼达芬系统受到接近固有频率 ω_0 的简谐力激励, 动力学方程为

$$\ddot{x} + 2\epsilon \xi_1 \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 (x + \epsilon x^3) = \epsilon F_0 \cos \omega t \quad (a)$$

$$\text{令} \quad \omega_0^2 = \omega^2 - \epsilon\sigma, \quad \psi = \omega t + \theta \quad (\text{b})$$

将方程(a)改写为

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \epsilon f(x, \dot{x}, \omega t) \quad (\text{c})$$

$$f(x, \dot{x}, \omega t) = F_0 \cos \omega t - 2\zeta_1 \omega_0 \dot{x} - \omega_0^2 x^3 + \sigma x \quad (\text{d})$$

将 $x_0 = a \cos \psi$, $\dot{x}_0 = -a\omega \sin \psi$ 代入上式, 得到

$$f_0(a, \psi, \omega t) = F_0 \cos(\psi - \theta) + 2\zeta_1 \omega_0 a \omega \sin \psi - \frac{1}{4} \omega_0^2 a^3 (3 \cos \psi + \cos 3\psi) + \sigma a \cos \psi \quad (\text{e})$$

代入方程(2.6.47a), 令 $\lambda = 1$, 整理后得到

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \omega^2 x_1 = \left(F_0 \cos \theta - \frac{3}{4} \omega_0^2 a^3 + 2a\omega B_1 + \sigma a \right) \cos \psi + (F_0 \sin \theta + 2\zeta_1 \omega_0 a \omega + 2\omega A_1) \sin \psi - \frac{1}{4} \omega_0^2 a^3 \cos 3\psi \quad (\text{f})$$

为避免此方程的解出现久期项, 必须令

$$\left. \begin{aligned} F_0 \cos \theta - \frac{3}{4} \omega_0^2 a^3 + 2a\omega B_1 + \sigma a &= 0 \\ F_0 \sin \theta + 2\zeta_1 \omega_0 a \omega + 2\omega A_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{g})$$

解出

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{2\omega} (2\zeta_1 \omega_0 a \omega + F_0 \sin \theta) \\ B_1 &= \frac{1}{2a\omega} \left(\frac{3}{4} \omega_0^2 a^3 - \sigma a - F_0 \cos \theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{h})$$

代入方程(2.6.39)和(2.6.41), 并利用式(b)消去 σ , 得到

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\epsilon}{2\omega} (2\zeta_1 \omega_0 a \omega + F_0 \sin \theta) \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{2a\omega} \left\{ \left[\omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \epsilon a^2 \right) - \omega^2 \right] a - \epsilon F_0 \cos \theta \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{i})$$

此方程组的非零常值解 a_s, θ_s 对应于稳态周期运动, 应满足

$$\left. \begin{aligned} 2\epsilon\zeta_1 \omega_0 a_s \omega &= -\epsilon F_0 \sin \theta_s \\ \left[\omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \epsilon a_s^2 \right) - \omega^2 \right] a_s &= \epsilon F_0 \cos \theta_s \end{aligned} \right\} \quad (\text{j})$$

消去 θ_s 后, 导出与用林滋泰德-庞加莱法导出的式(2.3.25)以及用平均法导出的式(2.4.42)完全相同的幅频特性关系:

$$\left(1 - s^2 + \frac{3}{4} \epsilon a_s^2 \right)^2 + (2\zeta_s)^2 = \left(\frac{B}{a_s} \right)^2 \quad (\text{k})$$

其中

$$s = \omega/\omega_0, \quad \zeta = \varepsilon\zeta_1, \quad B = \frac{\varepsilon F_0}{\omega_0^2} \quad (l)$$

满足条件(g)时,从方程(i)解出

$$x_1 = \frac{1}{32}a^3 \cos 3\psi \quad (m)$$

因此方程(c)的一次近似解为

$$x = a \cos(\omega t + \theta) + \frac{\varepsilon a^3}{32} \cos 3(\omega t + \theta) \quad (n)$$

其中 a 和 θ 的变化规律由微分方程(i)确定。

例 2.6-4 分析达芬方程的亚谐波共振。

解: 设无阻尼达芬系统受到简谐力激励, 系统的固有频率 ω_0 接近于激励频率的 $1/3$ 。动力学方程与方程(2.3.27)相同, 但广义坐标改用 y 表示

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + \varepsilon y^3 = F_0 \cos \omega t \quad (a)$$

$$\text{令} \quad \omega_0^2 = \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 - \varepsilon\sigma, \quad \psi = \left(\frac{\omega}{3}\right)t + \theta \quad (b)$$

将方程(a)改写为

$$\ddot{y} + \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 y = F_0 \cos \omega t + \varepsilon(\sigma y - y^3) \quad (c)$$

由于激励力不是小量, 作以下坐标变换:

$$y = x - A \cos \omega t, \quad A = \frac{9F_0}{8\omega^2} \quad (d)$$

代入方程(c), 化为 x 的微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 x &= \varepsilon f(x, \dot{x}, \omega t) \\ f(x, \dot{x}, \omega t) &= \sigma(x - A \cos \omega t) - (x - A \cos \omega t)^3 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

设此方程的渐近解为

$$x = a \cos \psi + \varepsilon x_1(a, \psi, \omega t) + \varepsilon^2 x_2(a, \psi, \omega t) + \cdots \quad (f)$$

其中的 a 和 θ 满足微分方程(2.6.39)和(2.6.41)。将上式代入方程(e), 导出渐近方程组

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 x_1 = f_0(a, \psi, \omega t) + \frac{2}{3}\omega A_1 \sin \psi + \frac{2}{3}a\omega B_1 \cos \psi \quad (g)$$

.....

其中 $f_0(a, \psi, \omega t)$ 利用式(b)化简为

$$\begin{aligned} f_0(a, \psi, \omega t) &= f\left(a \cos \psi, -\frac{a\omega}{3} \sin \psi, \omega t\right) \\ &= \left(\sigma - \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}aA \cos 3\theta - \frac{27}{16\omega^2}A\right)a \cos\left(\frac{\omega}{3}t + \theta\right) + \\ &\quad \frac{3}{4}a^2A \sin 3\theta \sin\left(\frac{\omega}{3}t + \theta\right) + \cdots \end{aligned} \quad (\text{h})$$

将上式代入方程(g), 为避免久期项, 必须令

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{3}\omega A_1 + \frac{3}{4}a^2A \sin 3\theta &= 0 \\ \frac{2}{3}\omega B_1 + \sigma - \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}aA \cos 3\theta - \frac{27}{16\omega^2}A &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{i})$$

解出

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{9}{8\omega}a^2A \sin 3\theta \\ B_1 &= \frac{3}{2\omega}\left(\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{4}aA \cos 3\theta + \frac{27}{16\omega^2}A - \sigma\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{j})$$

代入方程(2.6.39)和(2.6.41), 并利用式(b)和(d)消去 σ 和 A , 得到

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{81\epsilon a^2 F_0}{64\omega^3} \sin 3\theta \\ \dot{\theta} &= \frac{3}{2\omega}\left\{\frac{3}{4}\epsilon\left[a^2 - \left(\frac{9F_0}{8\omega^2}\right)a \cos 3\theta + 2\left(\frac{9F_0}{8\omega^2}\right)^2\right] + \omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{3}\right)^2\right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{k})$$

此方程对应于稳态周期运动的常值解 a_s, θ_s 应满足

$$\left. \begin{aligned} \theta_s &= 0 \\ a_s^2 - \left(\frac{9F_0}{8\omega^2}\right)a_s + 2\left(\frac{9F_0}{8\omega^2}\right)^2 + \frac{4}{3\epsilon}\left[\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{3}\right)^2\right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{l})$$

为保证 a_s 有实数解, 要求

$$-\frac{7}{4}\left(\frac{9F_0}{8\omega^2}\right)^2 + \frac{4}{3\epsilon}\left[\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{3}\right)^2\right] \geq 0 \quad (\text{m})$$

可由此导出与用林滋泰德-庞加莱法计算得到的式(2.3.36)完全相同的亚谐波共振条件。

§ 2.7 多自由度系统的自由振动和受迫振动

2.7.1 非线性多自由度系统的研究方法

与单自由度系统相比, 非线性多自由度系统和连续系统更难得到精

确解,因此定量求解多采用数值方法,近似解析方法和数值-解析方法。

对于非线性多自由度系统,数值方法的基础是求解常微分方程组的初值问题,求周期解时需要求解常微分方程组的边值问题,可采用打靶法、差分法和变分法。对于连续系统,数值方法分为有限差分法和有限元法两大类,包括在空间和时间上均用有限差分法,在时间上用有限差分法而在空间上用有限元法,以及在空间和时间上均用有限元法。

对于弱非线性的多自由度系统和连续系统,本章所述的谐波平衡法、平均法、多尺度法和渐近法等近似解析方法都可以使用。对于强非线性系统,需要先求得与之相近而又精确可积的非线性系统的精确解,然后对精确的非线性解进行摄动。所导出的微分方程和代数方程组通常仍无法精确求解,仍必须利用数值方法。对于非线性连续系统,数值-解析方法的应用有两种途径。一种是对空间变量作出假定,例如可将线性振动理论中的模态展开式应用于非线性系统,然后利用模态的正交性或伽辽金方法得到含对时间导数的非线性二阶常微分方程组。对于几何形状和边界条件复杂的系统,模态的确定需用数值方法,非线性常微分方程组的求解可用近似解析方法。另一种是对时间关系作出假定,例如假定为简谐振动,然后利用谐波平衡法导出描述空间性质的非线性微分方程的边值问题,通常采用含迭代过程的数值方法求解。

本章叙述的各种近似解析方法均可用于讨论非线性多自由度系统的自由振动和受迫振动。此处以串联的质量-弹簧系统和弹簧摆为典型例子,说明谐波平衡法和多尺度法在弱非线性多自由度系统中的应用。利用计算结果可以说明多自由度系统不同于单自由度系统的若干特殊现象,如模态参数、幅频特性、内共振、饱和现象和渗透现象等。

2.7.2 质量-弹簧系统的自由振动^[5]

在图 2.18 所示二自由度质量-弹簧系统中,质量分别为 m_1 和 m_2 的两个质点在弹簧 1 和 2 作用下作水平振动。 x_1 和 x_2 为以 m_1 和 m_2 的静平衡位置为原点的广义坐标,弹簧 1 为硬弹簧,恢复力特性为

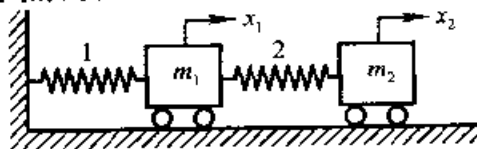


图 2.18 串联的质量-弹簧系统

$k_1 x_1(1 + \epsilon x_1^2)$, 弹簧 2 为线性弹簧, 刚度系数为 k_2 。系统的动能和势能分别为

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) \\ V &= \frac{1}{2} \left[k_1 x_1^2 \left(1 + \frac{\epsilon}{2} x_1^2 \right) + k_2 (x_2 - x_1)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.7.1)$$

代入拉格朗日方程, 导出系统的运动微分方程:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 + \epsilon k_1 x_1^3 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2(x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7.2)$$

引入以下参数:

$$\omega_{10}^2 = \frac{k_1}{m_1}, \quad \omega_{20}^2 = \frac{k_2}{m_2}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1} \quad (2.7.3)$$

将式(2.7.2)化为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + (\omega_{10}^2 + \mu \omega_{20}^2)x_1 - \mu \omega_{20}^2 x_2 + \epsilon \omega_{10}^2 x_1^3 &= 0 \\ \ddot{x}_2 - \omega_{20}^2(x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7.4)$$

利用谐波平衡法作近似计算, 设一阶谐波解为

$$x_i = A_{i0} \cos \omega_0 t \quad (i = 1, 2) \quad (2.7.5)$$

将上式代入(2.7.4), 得到自由振动频率 ω_0 与振幅 A_{10}, A_{20} 之间的关系式:

$$A_{10} \omega_0^2 - \mu \omega_{20}^2 (A_{10} - A_{20}) - \omega_{10}^2 A_{10} \left(1 + \frac{3\epsilon}{4} A_{10}^2 \right) + \dots = 0 \quad (2.7.6a)$$

$$A_{20} \omega_0^2 - \omega_{20}^2 (A_{20} - A_{10}) + \dots = 0 \quad (2.7.6b)$$

其中省略号表示高于 A_{10}^3 的高次谐波项。引入模态参数 $\phi = A_{20}/A_{10}$, 由式(2.7.6b)导出

$$\omega_0^2 = \left(\frac{\phi - 1}{\phi} \right) \omega_{20}^2 \quad (2.7.7)$$

将上式代入式(2.7.6a)解出

$$A_{10} = \pm \frac{2}{\sqrt{3\epsilon}} \sqrt{\frac{\omega_{20}^2 (1 + \mu\phi)(\phi - 1)}{\omega_{10}^2 \phi} - 1} \quad (2.7.8)$$

给定 ϕ 值, 可从式(2.7.7)和(2.7.8)计算得到 ω_0, A_{10} 和 $A_{20} = \phi A_{10}$ 。作为特例, 令 $m_1 = m_2 = m, k_1 = k_2 = k, \mu = 1, \epsilon = 1, \omega_{10}^2 = \omega_{20}^2 = k/m$, 从式

(2.7.8)导出

$$A_{10} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\phi^2 - \phi - 1}{\phi}}, \quad A_{20} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\phi(\phi^2 - \phi - 1)} \quad (2.7.9)$$

为保证 ω_0 , A_{10} 和 A_{20} 有实数解, 且避免 A_{10} 的值过大, 使略去的高次谐波不致产生过大的误差, 规定 ϕ 在以下范围内取值:

$$-0.618 \leq \phi \leq -0.5, \quad 1.618 \leq \phi \leq 2 \quad (2.7.10)$$

在此范围内的 ϕ 值所对应的 A_{10} 值不超过 0.816。引入参数 $s = \omega_0/\omega_{10}$, 导出振动频率的变化范围为

$$0.382 \leq s^2 \leq 0.5, \quad 2.618 \leq s^2 \leq 3 \quad (2.7.11)$$

图 2.19 给出 A_{10} 和 A_{20} 随 s^2 变化的曲线。可以看出, 非线性多自由度系统的固有频率 ω_0 和模态参数 ϕ 均随振动幅度的变化而改变。

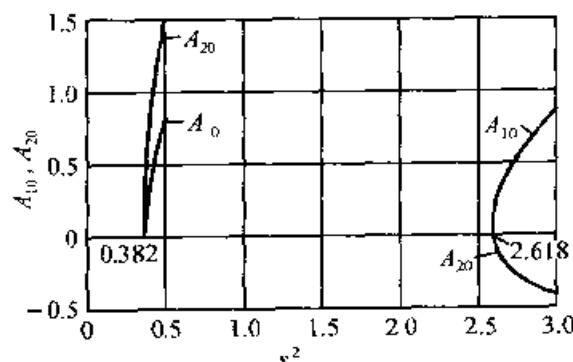


图 2.19 自由振动振幅与固有频率关系曲线

2.7.3 质量-弹簧系统的受迫振动

仍考虑图 2.18 所示的质量-弹簧系统, 设在质点 m_1 上作用一水平激励力 $F_0 \cos \omega t$ 。引入 $B = F_0/k_1$, 运动微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + (\omega_{10}^2 + \mu\omega_{20}^2)x_1 - \mu\omega_{20}^2x_2 + \epsilon\omega_{10}^2x_1^3 &= B\omega_{10}^2 \cos \omega t \\ \ddot{x}_2 - \omega_{20}^2(x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7.12)$$

设只考虑一阶谐波的稳态响应为

$$x_i = A_i \cos \omega t \quad (i = 1, 2) \quad (2.7.13)$$

将上式代入式(2.7.12), 引入参数 $\gamma = (\omega_{20}/\omega_{10})^2$ 和 $s = \omega/\omega_{10}$, 略去高次谐波项, 比较一次谐波项系数, 得到

$$\left. \begin{aligned} -A_1 s^2 + \mu\gamma(A_1 - A_2) + A_1 \left(1 + \frac{3\epsilon}{4} A_1^2\right) &= B \\ -A_2 s^2 + \gamma(A_2 - A_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7.14)$$

从上式消去 A_2 , 化为

$$s^4 - \left[1 + \frac{3\epsilon}{4}A_1^2 + \gamma(\mu + 1) - \frac{B}{A_1} \right] s^2 + \gamma \left(1 + \frac{3\epsilon}{4}A_1^2 - \frac{B}{A_1} \right) = 0 \quad (2.7.15)$$

解出

$$s^2 = \left\{ \left[1 + \frac{3\epsilon}{4}A_1^2 + \gamma(\mu + 1) - \frac{B}{A_1} \right] \pm \sqrt{\left[1 + \frac{3\epsilon}{4}A_1^2 + \gamma(\mu + 1) - \frac{B}{A_1} \right]^2 - 4\gamma \left(1 + \frac{3\epsilon}{4}A_1^2 - \frac{B}{A_1} \right)} \right\} \quad (2.7.16)$$

根据上式可作出 A_1 和 A_2 的幅频特性曲线。图 2.20 给出 $\mu = 0.1$, $\gamma = 1$, $\epsilon = 1$, $B = 0.0577$ 时 A_1 和 A_2 随激励频率比的平方 s^2 变化的曲线, 其中实线分别表示受迫振动振幅 A_1 和 A_2 , 虚线表示 $B = 0$ 时自由振动振幅 A_{10} 和 A_{20} 构成的骨架曲线。负值表示振动与激励相反。与图 0.1 表示的单自由度系统受迫振动的幅频特性曲线比较, 骨架曲线增加为两条。在激励频率比 s 的某些范围内, 每一个给定的 s 值可对应有三对 A_1 和 A_2 值, 因此要确定物理上能实现的振幅, 还需要进行稳定性分析。可以预计, 非线性多自由度系统也存在比单自由度系统更为复杂的跳跃现象。

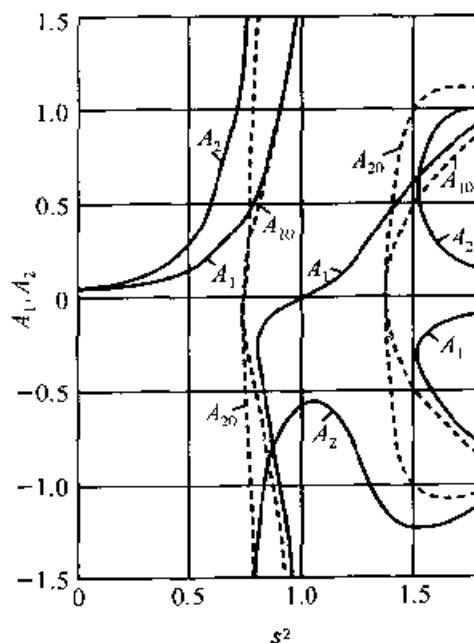


图 2.20 幅频特性曲线

2.7.4 弹簧摆的自由振动^[13]

讨论由质量为 m 的质点和弹簧约束组成, 可在铅垂平面内自由摆动的弹簧摆, 如图 2.21 所示。设弹簧刚度系数为 k 、原长为 l , 讨论弹簧摆的有限幅度摆动时, 以弹簧变形 x_1 和摆角 x_2 为广义坐标。系统的动能和势能分别为

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m [\dot{x}_1^2 + (l + x_1)^2 \dot{x}_2^2], \\ V &= \frac{1}{2} k x_1^2 + mg(l + x_1)(1 - \cos x_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.7.17)$$

列出系统的动力学方程:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{k}{m} x_1 + g(1 - \cos x_2) - (l + x_1) \dot{x}_2^2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{g}{l + x_1} \sin x_2 + \frac{2}{l + x_1} \dot{x}_1 \dot{x}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7.18)$$

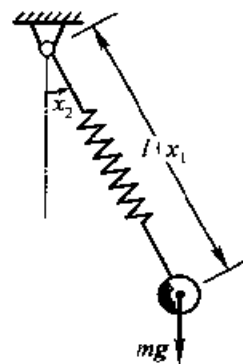


图 2.21 弹簧摆

只保留 x_1, x_2 及其导数的二次项, 化简为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_{10}^2 x_1 &= l \dot{x}_2^2 - \frac{g}{2} x_2^2 \\ \ddot{x}_2 + \omega_{20}^2 x_2 &= -\frac{2}{l} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{\omega_{20}^2}{2} x_1 x_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.7.19)$$

其中 ω_{10} 和 ω_{20} 为派生系统的两个固有频率:

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_{20} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2.7.20)$$

利用多尺度法作近似计算。设系统的运动按不同时间尺度 $T_0 = t$ 和 $T_1 = \epsilon t$ 变化, ϵ 为小量。将方程(2.7.19)的解写为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \epsilon x_{11}(T_0, T_1) + \epsilon^2 x_{12}(T_0, T_1) \\ x_2 &= \epsilon x_{21}(T_0, T_1) + \epsilon^2 x_{22}(T_0, T_1) \end{aligned} \right\} \quad (2.7.21)$$

将式(2.7.21)代入方程(2.7.19), 并利用式(2.5.4)和(2.5.5), 令 ϵ 的同次幂系数相等, 得到一次近似方程:

$$\left. \begin{aligned} D_0^2 x_{11} + \omega_{10}^2 x_{11} &= 0 \\ D_0^2 x_{21} + \omega_{20}^2 x_{21} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7.22)$$

和二次近似方程

$$\left. \begin{aligned} D_0^2 x_{12} + \omega_{10}^2 x_{12} &= -2D_0 D_1 x_{11} - \frac{1}{2} g x_{21}^2 + l (D_0 x_{21})^2 \\ D_0^2 x_{22} + \omega_{20}^2 x_{22} &= -2D_0 D_1 x_{21} + \frac{\omega_{20}^2}{l} x_{11} x_{21} - \frac{2}{l} (D_0 x_{11}) (D_0 x_{21}) \end{aligned} \right\} \quad (2.7.23)$$

设方程(2.7.23)的复数形式的解为

$$\left. \begin{aligned} x_{11} &= A_1(T_1)e^{i\omega_{10}T_0} + \bar{A}_1(T_1)e^{-i\omega_{10}T_0} \\ x_{21} &= A_2(T_1)e^{i\omega_{20}T_0} + \bar{A}_2(T_1)e^{-i\omega_{20}T_0} \end{aligned} \right\} \quad (2.7.24)$$

代入方程(2.7.23),得到

$$\begin{aligned} D_0^2 x_{12} + \omega_{10}^2 x_{12} &= -2i\omega_{10} \frac{dA_1}{dT_1} e^{i\omega_{10}T_0} - \frac{3}{2} g A_2^2 e^{2i\omega_{20}T_0} + \frac{1}{2} g A_2 \bar{A}_2 + cc \\ D_0^2 x_{22} + \omega_{20}^2 x_{22} &= -2i\omega_{20} \frac{dA_2}{dT_1} e^{i\omega_{20}T_0} + \frac{\omega_{20}(2\omega_{10} + \omega_{20})}{l} A_1 A_2 e^{i(\omega_{10} + \omega_{20})T_0} + \\ &\quad \frac{\omega_{20}(-2\omega_{10} + \omega_{20})}{l} A_1 \bar{A}_2 e^{i(\omega_{10} - \omega_{20})T_0} + cc \end{aligned} \quad (2.7.25)$$

当 $\omega_{10} \neq 2\omega_{20}$ 时,为避免久期项,必须令

$$\frac{dA_1}{dT_1} = 0, \quad \frac{dA_2}{dT_1} = 0 \quad (2.7.26)$$

即 A_1 和 A_2 均为常数。此时由方程(2.7.25)解出

$$\left. \begin{aligned} x_{12} &= \frac{g}{2\omega_{10}^2} A_2 \bar{A}_2 - \frac{3g}{2(\omega_{10}^2 - 4\omega_{20}^2)} A_2^2 e^{2i\omega_{20}T_0} + cc \\ x_{22} &= -\frac{\omega_{20}(2\omega_{10} + \omega_{20})}{\omega_{10}(\omega_{10} + 2\omega_{20})l} A_1 A_2 e^{i(\omega_{10} + \omega_{20})T_0} + \\ &\quad \frac{\omega_{20}(2\omega_{10} - \omega_{20})}{\omega_{10}(\omega_{10} - 2\omega_{20})l} A_1 \bar{A}_2 e^{i(\omega_{10} - \omega_{20})T_0} + cc \end{aligned} \right\} \quad (2.7.27)$$

当 $\omega_{10} \approx 2\omega_{20}$ 时,引入参数 σ 使

$$\omega_{10} = 2\omega_{20} + \epsilon\sigma \quad (2.7.28)$$

代入式(2.7.25),整理后得到

$$\left. \begin{aligned} D_0^2 x_{12} + \omega_{10}^2 x_{12} &= -\left(2i\omega_{10} \frac{dA_1}{dT_1} + \frac{3}{2} g A_2^2 e^{i\sigma T_1}\right) e^{i\omega_{10}T_0} + \frac{1}{2} g A_2 \bar{A}_2 + cc \\ D_0^2 x_{22} + \omega_{20}^2 x_{22} &= -\left(2i\omega_{20} \frac{dA_2}{dT_1} + \frac{3\omega_{20}^2}{l} A_1 \bar{A}_2 e^{i\sigma T_1}\right) e^{i\omega_{20}T_0} + \\ &\quad \frac{5\omega_{20}^2}{l} A_1 A_2 e^{i(3\omega_{20}T_0 + \sigma T_1)} + cc \end{aligned} \right\} \quad (2.7.29)$$

为避免久期项,必须令

$$\left. \begin{aligned} 2i\omega_{10} \frac{dA_1}{dT_1} + \frac{3}{2}gA_2^2 e^{i\sigma T_1} &= 0 \\ 2i\omega_{20} \frac{dA_2}{dT_1} + \frac{3\omega_{20}^2}{l}A_1\bar{A}_2 e^{i\sigma T_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7.30)$$

将 T_1 的复函数 A_1 和 A_2 写为指数形式:

$$A_k(T_1) = \frac{1}{2}a_k(T_1)e^{i\theta_k(T_1)} \quad (k=1,2) \quad (2.7.31)$$

其中 a_1, a_2, θ_1 和 θ_2 均为 T_1 亦即 εt 的实函数。将式(2.7.31)代入式(2.7.10),分离实部和虚部,得到关于 a_1, a_2, θ_1 和 θ_2 的常微分方程组:

$$\dot{a}_1 = \frac{3\varepsilon}{8\omega_{10}}ga_2^2\sin\varphi \quad (2.7.32a)$$

$$\dot{a}_2 = \frac{3\varepsilon\omega_{20}}{4l}a_1a_2\sin\varphi \quad (2.7.32b)$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{3\varepsilon}{8\omega_{10}a_1}ga_2^2\cos\varphi \quad (2.7.32c)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{3\varepsilon\omega_{20}}{4l}a_1\cos\varphi \quad (2.7.32d)$$

其中

$$\varphi = \theta_1 - 2\theta_2 - \sigma\varepsilon t \quad (2.7.33)$$

将方程(2.7.32a)和(2.7.32b)消去 φ 后可化为全微分

$$\gamma a_1 \dot{a}_1 + a_2 \dot{a}_2 = 0 \quad (2.7.34)$$

其中

$$\gamma = \frac{2\omega_{10}\omega_{20}}{gl} \quad (2.7.35)$$

从式(2.7.34)积分得到

$$\gamma a_1^2 + a_2^2 = \text{const} \quad (2.7.36)$$

式(2.7.36)表明弹簧的伸缩和摆动均为有界,而且两种运动的幅值交替增减,能量不断在两种振动形式之间交换。这种现象称为内共振。当派生系统的多个固有频率值相互可有理通约或接近于可有理通约时,就可能产生内共振。弹簧摆系统在不同初值条件下的运动时间历程如图2.22所示,其中图a的初值为 $a_1(0)=1, a_2(0)=0$,图b的初值为 $a_1(0)=a_2(0)=1$ 。

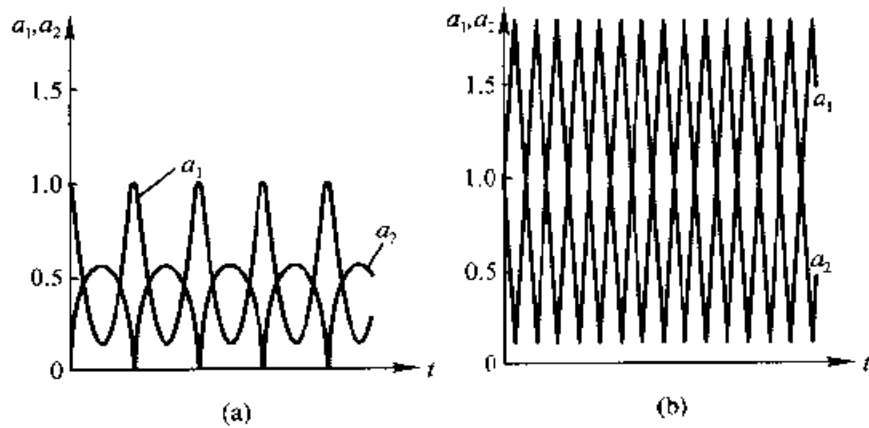


图 2.22 弹簧摆的内共振

2.7.5 弹簧摆的受迫振动

设弹簧摆存在微弱的阻尼,轴向阻尼力与质点的轴向速度成正比,切向阻尼力与弹簧摆动角速度成正比,比例系数分别为 $2\epsilon c_1$ 和 $2\epsilon c_2$ 。摆上沿轴向和切向分别作用有频率均为 ω 的两个简谐激励力,激励力幅值分别与 ϵ^2 和 ϵ 同阶,且两者存在相位差 θ (图 2.23)。系统的动力学方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\epsilon c_1 \dot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 + g(1 - \cos x_2) - (l + x_1)\dot{x}_2^2 &= \frac{\epsilon^2 F_1}{m} \cos(\omega t + \theta) \\ \ddot{x}_2 + 2\epsilon c_2 \dot{x}_2 + \frac{g}{l + x_1} \sin x_2 + \frac{2}{l + x_1} \dot{x}_1 \dot{x}_2 &= \frac{\epsilon F_2}{m(l + x_1)} \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (2.7.37)$$

只保留 x_1, x_2 及其导数的二次项,化简为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_{10}^2 x_1 &= -2\epsilon c_1 \dot{x}_1 + l \dot{x}_2^2 - \frac{g}{2} x_2^2 + \epsilon^2 f_1 \cos(\omega t + \theta) \\ \ddot{x}_2 + \omega_{20}^2 x_2 &= -2\epsilon c_2 \dot{x}_2 - \frac{2}{l} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{\omega_{20}^2}{2} x_1 x_2 + \epsilon \left(1 - \frac{x_1}{l}\right) f_2 \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (2.7.38)$$

其中 ω_{10} 和 ω_{20} 为派生系统的两个固有频率,如式(2.7.20)定义, f_1 和 f_2 定义为

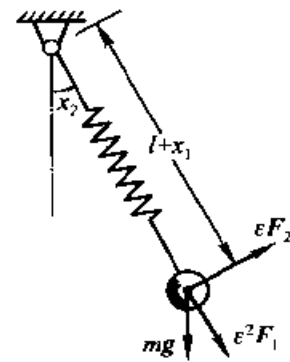


图 2.23 受激励的带阻尼弹簧摆

$$f_1 = \frac{F_1}{m}, \quad f_2 = \frac{F_2}{ml} \quad (2.7.39)$$

仍采用多尺度法,将式(2.7.21)代入方程(2.7.38),令 ϵ 的同幂次系数相等,得到一次近似方程

$$\left. \begin{aligned} D_0^2 x_{11} + \omega_{10}^2 x_{11} &= 0 \\ D_0^2 x_{21} + \omega_{20}^2 x_{21} &= f_2 \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (2.7.40)$$

和二次近似方程

$$\left. \begin{aligned} D_0^2 x_{12} + \omega_{10}^2 x_{12} &= -2(D_0 D_1 + c_1 D_0) x_{11} - \frac{1}{2} g x_{21}^2 + \\ &\quad l(D_0 x_{21})^2 + f_1 \cos(\omega t + \theta) \\ D_0^2 x_{22} + \omega_{20}^2 x_{22} &= -2(D_0 D_1 + c_2 D_0) x_{21} + \frac{\omega_{20}^2}{l} x_{11} x_{21} - \\ &\quad \frac{2}{l} (D_0 x_{11})(D_0 x_{21}) - \frac{x_{11} f_2}{l} \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (2.7.41)$$

设方程(2.7.40)的一次近似解的复数形式为

$$\left. \begin{aligned} x_{11} &= A_1(T_1) e^{i\omega_{10} T_0} + cc \\ x_{21} &= A_2(T_1) e^{i\omega_{20} T_0} + A_0(T_1) e^{i\omega T_0} + cc \end{aligned} \right\} \quad (2.7.42)$$

其中常数 A_0 为派生系统的受迫振动振幅,

$$A_0 = \frac{f_2}{2(\omega_{20}^2 - \omega^2)} \quad (2.7.43)$$

将一次近似解(2.7.42)代入方程(2.7.41),得到

$$\begin{aligned} D_0^2 x_{12} + \omega_{10}^2 x_{12} &= -2i\omega_{10}(D_1 A_1 + c_1 A_1) e^{i\omega_{10} T_0} - \frac{g}{2} A_2 (\bar{A}_2 - 3A_2 e^{2i\omega_{20} T_0}) + \\ &\quad A_0^2 \left[\left(l\omega^2 - \frac{g}{2} \right) - \left(l\omega^2 + \frac{g}{2} \right) e^{2i\omega T_0} \right] + A_0 \left[\left(l\omega_{20}\omega - \frac{g}{2} \right) \bar{A}_2 e^{i(\omega_{20}-\omega)T_0} - \right. \\ &\quad \left. \left(l\omega_{20}\omega + \frac{g}{2} \right) A_2 e^{i(\omega_{20}+\omega)T_0} \right] + \frac{1}{2} f_1 e^{i(\omega T_0 + \theta)} + cc \end{aligned} \quad (2.7.44a)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 x_{22} + \omega_{20}^2 x_{22} &= -2i\omega_{20}(D_1 A_2 + c_2 A_2) e^{i\omega_{20} T_0} + \frac{\omega_{20}^2}{l} A_1 [(2\omega_{10} + \\ &\quad \omega_{20}) A_2 e^{i(\omega_{10}+\omega_{20})T_0} + (-2\omega_{10} + \omega_{20}) \bar{A}_2 e^{i(\omega_{10}-\omega_{20})T_0}] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{A_0}{l} [(2\omega_{10}\omega + \omega_{20}^2)A_1 e^{i(\omega+\omega_{20})T_0} + (-2\omega_{10}\omega + \omega_{20}^2)\bar{A}_1 e^{i(\omega-\omega_{20})T_0}] - \\ & \frac{f_2 A_1}{2l} e^{i(\omega+\omega_{10})T_0} + \text{cc} \end{aligned} \quad (2.7.44b)$$

讨论激励频率 ω 接近 ω_{10} 的主共振情形。令

$$\omega = \omega_{10} + \varepsilon\sigma_1 \quad (2.7.45)$$

对于内共振情形 ($\omega_{10} \approx 2\omega_{20}$) 和非内共振情形 (ω_{10} 远离 $2\omega_{20}$) 分别进行讨论。先讨论后者, 将式(2.7.45)代入方程(2.7.44), 化为

$$\begin{aligned} D_0^2 x_{12} + \omega_{10}^2 x_{12} &= \left[-2i\omega_{10}(D_1 A_1 + c_1 A_1) + \frac{1}{2} f_1 e^{i(\sigma_1 T_1 + \theta)} \right] e^{i\omega_{10} T_0} + \dots \\ &\dots + \text{cc} \\ D_0^2 x_{22} + \omega_{20}^2 x_{22} &= -2i\omega_{20}(D_1 A_2 + c_2 A_2) e^{i\omega_{20} T_0} + \dots + \text{cc} \end{aligned} \quad (2.7.46)$$

其中省略号表示与久期项无关的项。从无久期项条件导出 A_1 和 A_2 的微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_1}{dT_1} + c_1 A_1 &= -\frac{if_1}{4\omega_{10}} e^{i(\sigma_1 T_1 + \theta)} \\ \frac{dA_2}{dT_1} + c_2 A_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7.47)$$

此方程的解为

$$\left. \begin{aligned} A_1(T_1) &= \left(\frac{1}{2} a_1 e^{i\theta_1} \right) e^{-ic_1 T_1} - \frac{if_1}{4\omega_{10}(c_1 + i\sigma_1)} e^{i(\sigma_1 T_1 + \theta)} \\ A_2(T_1) &= \left(\frac{1}{2} a_2 e^{i\theta_2} \right) e^{-ic_2 T_1} \end{aligned} \right\} \quad (2.7.48)$$

其中常数 $a_1, a_2, \theta_1, \theta_2$ 由初始条件确定。当 $T_1 \rightarrow \infty$ 时, A_1 和 A_2 的极限值分别为

$$\left. \begin{aligned} \lim_{T_1 \rightarrow \infty} A_1 &= -\frac{if_1}{4\omega_{10} \sqrt{c_1^2 + \sigma_1^2}} e^{i(\sigma_1 T_1 + \theta_0)}, \quad \theta_0 = \theta + \arctan \frac{\sigma_1}{c_1} \\ \lim_{T_1 \rightarrow \infty} A_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7.49)$$

表明不存在内共振时, 一次近似解基本上与线性系统的受迫振动规律相同, 而不受非线性项的影响。对于内共振的情形, 令

$$\omega_{10} = 2\omega_{20} - \varepsilon\sigma_2 \quad (2.7.50)$$

代入方程(2.7.44), 化为

$$\left. \begin{aligned} D_0^2 x_{12} + \omega_{10}^2 x_{12} &= \left[-2i\omega_{10}(D_1 A_1 + c_1 A_1) - \frac{3}{2}gA_2^2 e^{i\sigma_2 T_1} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2}f_1 e^{i(\sigma_1 T_1 + \theta)} \right] e^{i\omega_{10} T_0} + \cdots + cc \\ D_0^2 x_{22} + \omega_{20}^2 x_{22} &= \left[-2i\omega_{20}(D_1 A_2 + c_2 A_2) - \right. \\ &\quad \left. \frac{3}{l}\omega_{20}^2 A_1 \bar{A}_2 e^{-i\sigma_2 T_1} \right] e^{i\omega_{20} T_0} + \cdots + cc \end{aligned} \right\} \quad (2.7.51)$$

其中省略号表示与久期项无关的项。从无久期项条件导出 A_1 和 A_2 的微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_1}{dT_1} + c_1 A_1 &= \frac{i}{4\omega_{10}} (3gA_2^2 e^{i\sigma_2 T_1} - f_1 e^{i(\sigma_1 T_1 + \theta)}) \\ \frac{dA_2}{dT_1} + c_2 A_2 &= \frac{3i\omega_{20}}{2l} A_1 \bar{A}_2 e^{-i\sigma_2 T_1} \end{aligned} \right\} \quad (2.7.52)$$

将 T_1 的复函数 A_1 和 A_2 写成指数形式:

$$A_k(T_1) = \frac{1}{2}a_k(T_1)e^{i\psi_k(T_1)} \quad (k=1,2) \quad (2.7.53)$$

代入方程(2.7.52), 分离实部和虚部, 得到关于 a_1, a_2, ψ_1 和 ψ_2 的常微分方程组:

$$\dot{a}_1 = -\varepsilon c_1 a_1 + \frac{\varepsilon}{2\omega_{10}} \left(\frac{3}{4}ga_2^2 \sin \varphi_2 + f_1 \sin \varphi_1 \right) \quad (2.7.54a)$$

$$\dot{a}_2 = -\varepsilon a_2 \left(c_2 + \frac{3\omega_{20}}{4l} a_1 \sin \varphi_2 \right) \quad (2.7.54b)$$

$$\dot{\psi}_1 = \frac{\varepsilon}{2\omega_{10}a_1} \left(\frac{3}{4}ga_2^2 \cos \varphi_2 + f_1 \cos \varphi_1 \right) \quad (2.7.54c)$$

$$\dot{\psi}_2 = \frac{3\varepsilon\omega_{20}}{4l} a_1 \cos \varphi_2 \quad (2.7.54d)$$

其中

$$\varphi_1 = \sigma_1 T_1 + \theta - \psi_1, \quad \varphi_2 = \psi_1 - 2\psi_2 - \sigma_2 T_1 \quad (2.7.55)$$

a_1 和 a_2 的常值解 a_{1s}, a_{2s} 对应于振幅定常的周期运动, 此常值解的存在条件为

$$\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = \dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0 \quad (2.7.56)$$

代入方程组(2.7.54), 导出

$$c_1 a_{1s} - \frac{1}{2\omega_{10}} \left(\frac{3}{4} g a_{2s}^2 \sin \varphi_2 + f_1 \sin \varphi_1 \right) = 0 \quad (2.7.57a)$$

$$a_{2s} \left(c_2 + \frac{3\omega_{20}}{4l} a_{1s} \sin \varphi_2 \right) = 0 \quad (2.7.57b)$$

$$\sigma_1 a_{1s} - \frac{1}{2\omega_{10}} \left(\frac{3}{4} g a_{2s}^2 \cos \varphi_2 + f_1 \cos \varphi_1 \right) = 0 \quad (2.7.57c)$$

$$\sigma_2 - \sigma_1 - \frac{3\omega_{20}}{4l} a_{1s} \cos \varphi_2 = 0 \quad (2.7.57d)$$

由式(2.7.57b), 分别对 $a_{2s} = 0$ 和 $a_{2s} \neq 0$ 两种情况求解。将 $a_{2s} = 0$ 代入式(2.7.57a)和(2.7.57c), 消去 φ_1 后得到

$$a_{1s} = \frac{f_1}{2\omega_{10} \sqrt{c_1^2 + \sigma_1^2}} \quad (2.7.58)$$

若 $a_{2s} \neq 0$, 从式(2.7.57b)和(2.7.57d)消去 φ_2 后得到

$$a_{1s} = \frac{2l}{3\omega_{20}} \sqrt{4c_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2} = a_{1s}^* \quad (2.7.59)$$

将解出的 $\sin \varphi_2$ 和 $\cos \varphi_2$ 代入式(2.7.57a)和(2.7.57c), 消去 φ_1 化简后导出

$$a_{2s} = \frac{2}{\sqrt{3g}} \sqrt{-\Gamma_1 \pm \sqrt{f_1^2 - \Gamma_2^2}} \quad (2.7.60)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{4\omega_{10}l}{3\omega_{20}} [2c_1c_2 + \sigma_1(\sigma_2 - \sigma_1)] \\ \Gamma_2 &= \frac{4\omega_{10}l}{3\omega_{20}} [2\sigma_1c_2 + c_1(\sigma_2 - \sigma_1)] \end{aligned} \right\} \quad (2.7.61)$$

响应振幅 a_{1s} 和 a_{2s} 作为激励幅值 f_1 的函数的典型曲线如图 2.24 和图 2.25 所示, 分别对应于 $\Gamma_1 > 0$ 和 $\Gamma_1 < 0$ 情形。各曲线记为

$$\left. \begin{aligned} C_1: \quad a_{1s} &= \frac{f_1}{2\omega_{10} \sqrt{c_1^2 + \sigma_1^2}} \\ C_2: \quad a_{2s} &= 0 \\ C_3: \quad a_{1s} &= a_{1s}^* \\ C_4: \quad a_{2s} &= \frac{2}{\sqrt{3g}} \sqrt{-\Gamma_1 \pm \sqrt{f_1^2 - \Gamma_2^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.7.62)$$

激励幅值 f_1 存在二分岔值 f_1^* 和 f_1^{**} ,

$$f_1^* = \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2}, \quad f_1^{**} = |\Gamma_2| \quad (2.7.63)$$

其中 f_1^* 为 C_4 与 f_1 轴的交点,也是 C_1 与 C_3 的交点坐标。 $\Gamma_1 > 0$ 时 f_1^* 为能使式(2.7.60)中 a_2 有实数解的 f_1 的最小值,即曲线仅当 $f_1 \geq f_1^*$ 时存在。当 $\Gamma_1 < 0$ 时, C_4 曲线存在的 f_1 的最小值为 f_1^{**} 。

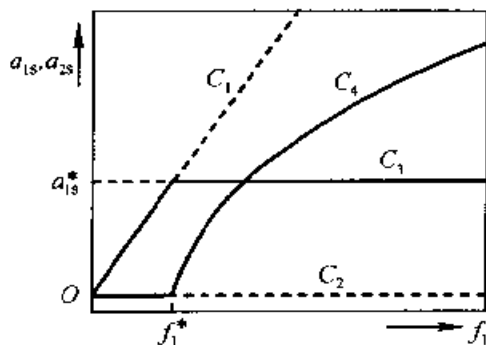


图 2.24 响应幅值与激励幅值
关系曲线($\Gamma_1 > 0$)

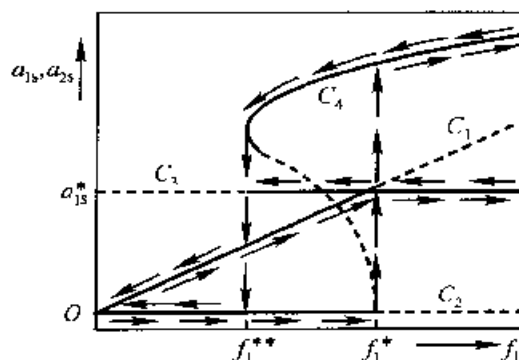


图 2.25 响应幅值与激励幅值
关系曲线($\Gamma_1 < 0$)

利用一次近似理论进一步判断各定常周期运动的稳定性,则在 f_1^* 和 f_1^{**} 分隔的不同区域内,受迫振动解的数目和稳定性都不同。在图 2.24 和图 2.25 内以实线表示稳定状态,虚线表示不稳定状态。可得出以下结论:

(1) 对于 $\Gamma_1 > 0$ 情形,例如令 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$,即外共振和内共振均为完全调谐情形(图 2.24),当 $f_1 < f_1^*$ 时沿径向的激励仅能激起弹簧摆的径向受迫振动,响应幅值与激励幅值成正比,类似于线性系统。当 f_1 增大到 $f_1 \geq f_1^*$ 时,径向响应的幅值停止增长而保持常值,称作饱和现象。与此同时,弹簧摆开始沿切向产生受迫摆动,振幅随激励幅值按 $1/2$ 次幂规律增长。这种激励输入的能量向另一个自由度转移的现象也称为渗透现象。

(2) 对于 $\Gamma_1 < 0$ 情形,例如令 $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0$,即仅内共振完全调谐,而外共振存在小失调的情形(图 2.25),由于在 $f_1^{**} < f_1 < f_1^*$ 区域内 a_{1s} 和 a_{2s} 各存在两个稳定解,因此除上述饱和(渗透)现象依然存在之外,还可发生当激励幅值连续变化经过 $f_1 = f_1^*$ 和 $f_1 = f_1^{**}$ 时的跳跃现象。 f_1^* 和 f_1^{**} 成为参数 f_1 的动态分岔点。

习 题

2.1 试用谐波平衡法确定非线性受迫振动系统

$$m\ddot{x} + k(x + \epsilon x^2) = F \cos \omega t$$

周期为 $4\pi/\omega$ 的近似解, 导出幅频特性关系式, 并确定解存在的条件。

2.2 试用谐波平衡法确定单自由度非线性受迫振动系统

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx - \frac{a}{1-x} = F \cos \omega t$$

共振解的幅频特性关系式。

2.3 试用等效线性化方法确定非线性受迫振动

$$m\ddot{x} + k_1 x + k_2 x^3 = F + F_0 \sin \omega t$$

的共振响应的幅频特性。其中

$$F = \begin{cases} -mg\mu & (\dot{x} > 0) \\ mg\mu & (\dot{x} < 0) \end{cases}$$

2.4 试分别用林滋泰德-庞加莱法、多尺度法和平均法求

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon \dot{x}^2 x \quad (\epsilon \ll 1)$$

的一阶近似解。能否用正规摄动法求解?

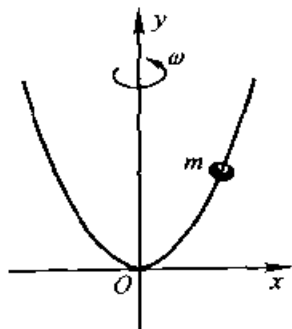
2.5 试分别用林滋泰德-庞加莱法、多尺度法和平均法求

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon x^5 \quad (\epsilon \ll 1)$$

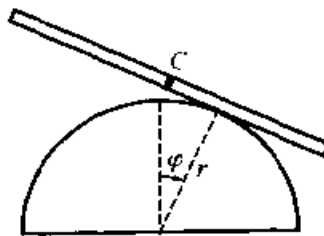
的一阶近似解。

2.6 质量为 m 的小环沿以匀角速度 ω 绕对称轴旋转的抛物线上作无摩擦滑动。在图示坐标系中, $y = cx^2$, 且满足条件 $2gc - \omega^2 > 0$ 。试建立环运动的动力学方程并求近似解。

2.7 图示长度为 l 的均质杆在半径为 r 的半球面上作无摩擦运动。平衡时杆质心在球面最高点。试建立角度 φ 满足的微分方程并求近似解。

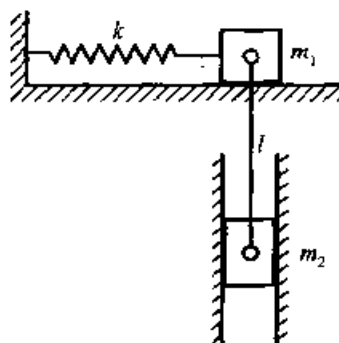


题 2.6 图



题 2.7 图

2.8 在图示系统中,质量分别为 m_1 和 m_2 的物块由长度为 l 的无自重刚性杆连接。杆在铅垂位置时刚度系数为 k 的弹簧为原长。物块离弹簧静平衡位置的位移为 x 。建立 x 所满足的微分方程,在按 x/l 展开的式中只保留二次项,求近似解。



题 2.8 图

2.9 试用多尺度法求

$$\ddot{x} + x + \varepsilon(x^2 + \dot{x}^2) = 0 \quad (\varepsilon \ll 1)$$

的近似解。

2.10 试分别用多尺度法和平均法求

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\delta\dot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0 \quad (\varepsilon \ll 1)$$

的近似解。能否用林滋泰德-庞卡莱法求解?

2.11 试分别用多尺度法和平均法求

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\varepsilon\delta x^2 \dot{x} + \varepsilon b x^3 = 0 \quad (\varepsilon \ll 1)$$

的近似解。

2.12 对于小参数 ε , 试用平均法求下列方程的近似解:

$$(1) \ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x|x| = 0;$$

$$(2) \dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon(\delta_1 \operatorname{sgn} \dot{x} + 2\delta_2 \dot{x}) = 0;$$

$$(3) \ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon(\delta_1 \operatorname{sgn} \dot{x} + 2\delta_2 \dot{x}|\dot{x}|) = 0;$$

$$(4) \ddot{x} + x + \varepsilon(2\delta_1 \dot{x} + \delta_2 \dot{x}|\dot{x}|) = 0;$$

$$(5) \ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon(-2\delta_1 \dot{x} + \delta_2 \dot{x}|\dot{x}| + \delta_3 x^3) = 0.$$

2.13 对于受干摩擦作用的质量弹簧系统

$$m\ddot{x} + \varepsilon F \operatorname{sgn} \dot{x} + kx = 0$$

试用平均法求振幅随时间衰减的变化率。

2.14 对于非线性振动系统

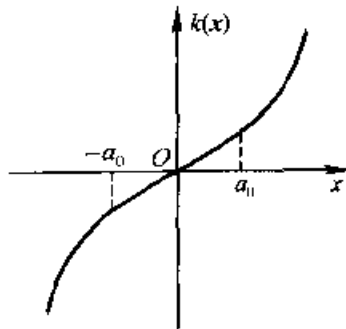
$$\ddot{x} + \rho \operatorname{sgn} \dot{x} + g \operatorname{sgn} x = 0 \quad (\rho < g); \quad x(0) = A(>0), \quad \dot{x}(0) = 0$$

试用平均法求振动规律的近似解。

2.15 设质量 m 和刚度系数 k 的质量弹簧系统在 $x = \pm a_0$ 处受到附加非线性弹簧作用,使弹簧恢复力 $k(x)$ 按以下规律变化:

$$k(x) = \begin{cases} kx & (|x| \leq a_0) \\ k[x + \varepsilon(x - a_0)^3] & (|x| > a_0) \end{cases}$$

如图示。试用平均法计算其自由振动频率。



题 2.15 图

2.16 试分别用多尺度法和平均法求

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \dot{x}^2 + F_1 \cos \omega_1 t + F_2 \cos \omega_2 t$$

当(1) $\omega_1 - \omega_2 \approx \omega_0$, (2) $\omega_1 + \omega_2 \approx \omega_0$, 且 ω_1 和 ω_2 不接近零时的近似解振幅和相位的微分方程。

2.17 试用多尺度法求

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - 2\epsilon[(1-u)\dot{x} - \dot{u}x], \quad \dot{u} + u = x^2$$

的近似解。

2.18 当 $\omega_{30} \approx \omega_{10} + \omega_{20}$ 时, 试用平均法建立

$$\ddot{x}_1 + \omega_{10}^2 x_1 = b_1 x_2 x_3, \quad \ddot{x}_2 + \omega_{20}^2 x_2 = b_2 x_1 x_3, \quad \ddot{x}_3 + \omega_{30}^2 x_3 = b_3 x_1 x_2$$

的近似解振幅和相位的微分方程。

2.19 试分别用多尺度法和平均法建立

$$\ddot{x}_1 + \omega_{10}^2 x_1 = \epsilon b_1 x_2 x_2 + \epsilon F_1 \cos \omega_1 t, \quad \ddot{x}_2 + \omega_{20}^2 x_2 = \epsilon b_2 x_1^2 + \epsilon F_2 \cos \omega_2 t$$

当(1) $\omega_{20} \approx 2\omega_{10}$ 且 $\omega_1 \approx \omega_{10}$, (2) $\omega_{20} \approx 2\omega_{10}$ 且 $\omega_2 \approx \omega_{20}$ 时近似解振幅和相位的微分方程。

第三章 自激振动

除自由振动和受迫振动之外,自激振动是工程中大量存在的另一种振动形式。自激振动靠系统外的来源补充能量,但能源是恒定的而不同于受迫振动。系统依靠自身运动状态的反馈作用调节能量输入,以维持不衰减的持续振动。振动的频率和振幅均由系统的物理参数确定,与初始条件无关。线性系统不可能产生自激振动,能产生自激振动的系统必为非线性系统。本章叙述产生自激振动的物理原因和自激振动的普遍性质,并列举工程中的典型自激振动问题,如时钟原理、干摩擦自振、输电线舞动和管内流体喘振等。除利用第一章中叙述的相平面内的极限环定性地描述自激振动过程以外,还利用第二章中叙述的各种近似解析方法对自激振动作定量研究。此外,本章还介绍动态分岔的初步概念。

§ 3.1 自激振动概述

3.1.1 自激振动的产生

在线性振动的讨论中,无外界能量补充时,只有机械能守恒的保守系统才能维持等幅的自由振动。对于有耗散因素存在的耗散系统,其机械能在振动过程中必不断损耗,如不补充外界能量等幅振动必不可能维持。系统在周期变化的激励力作用下可以维持等幅振动,这种靠交变的外界能量维持的等幅振动称为受迫振动。自然界和工程中还存在另一种类型的振动系统称为自振系统,它也接受外界的能量补充,但能源是恒定的,而不是周期变化的。系统以自己的运动状态作为调节器,以控制能量的输入。这类系统能自主地从定常的能源汲取能量,调节器的作用使输入的能量具有交变性。当输入的能量与耗散的能量达到平衡时,系统即可维持等幅振动,称为自激振动。自振系统由三部分构成,即:(1)耗散的振动系统;(2)恒定的能源;(3)受系统运动状态反馈的调节器(图 3.1)。

以电铃和蒸汽机为例。电铃的铃锤和弹簧片组成振动系统(图 3.2),直流电源为恒定的能源,电磁断续器为调节器。通电以后铃锤在电



图 3.1 自振系统框图

磁力作用下产生位移敲击铜铃,同时使电路断开,电磁力,铃锤在弹簧恢复力作用下回到原处,如此往复循环以产生持久的自激振动。蒸汽机是由活塞、连杆和飞轮组成振动系统(图 3.3),锅炉供应的蒸汽为恒定能源,配气阀为调节器。蒸汽推动活塞,并通过连杆带动飞轮转动,同时使配气阀移动以改变进气方向,使蒸汽朝相反方向推动活塞,使活塞产生往复的自激振动带动飞轮作持久的转动。

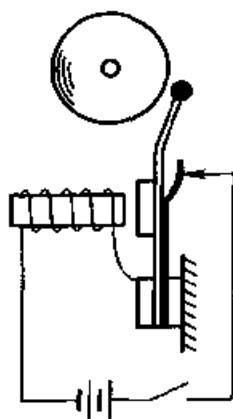


图 3.2 电铃

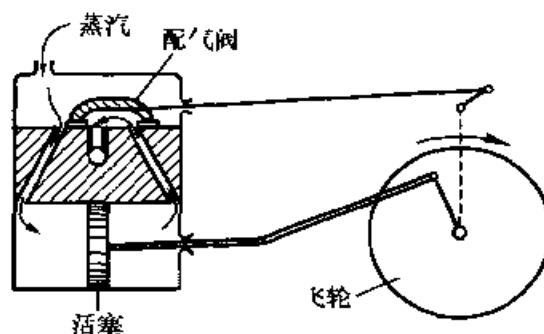


图 3.3 蒸汽机

3.1.2 自激振动的特征

自激振动有以下特征:

- (1) 振动过程中,存在能量的输入与耗散,因此自振系统为非保守系统。
- (2) 能源恒定,能量的输入仅受运动状态,即振动系统的位移和速度的调节,因此自振系统不显含时间变量,为自治系统。
- (3) 振动的特征量,如频率和振幅,由系统的物理参数确定,与初始条件无关。
- (4) 自治的线性系统只能产生衰减自由振动,无耗散时也只能产生振幅由初始条件确定的等幅自由振动。因此自振系统必为非线性系统。
- (5) 自激振动的稳定性取决于能量的输入与耗散的相互关系。若振

幅偏离稳态值时,能量的增减能促使振幅回至稳态值,则自激振动稳定(图 3.4a)。反之,自激振动不稳定(图 3.4b)。

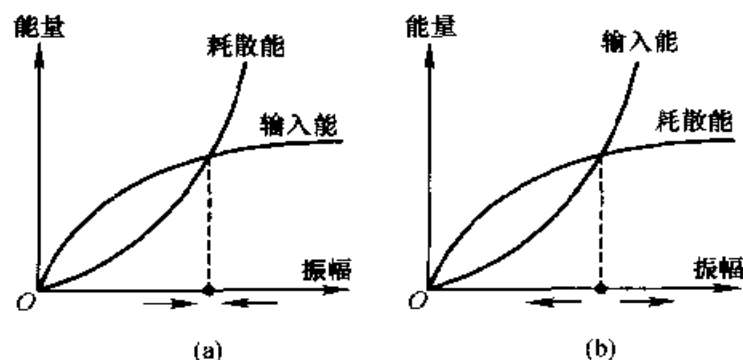


图 3.4 自振系统能量 - 振幅关系曲线

§ 3.2 工程中的自激振动

3.2.1 时钟原理

普通的机械钟的运动是典型的自激振动。振动系统是带于摩擦的重力摆,恒定的能源是发条机构,调节器是特殊设计的擒纵机构。这种机构能保证摆在指定位置受到由发条带动的齿轮的冲击。例如当摆向左运动经过图 3.5 所示的虚线位置 $x = a$ 时,受到来自发条能源的与摆方向一致的冲击,冲击的结果使摆获得能量增量 ΔE 。同样,当摆向右经过位置 $x = -a$ 时,也受到与运动方向一致的同样大小的冲击。发条能源以这种方式不断向摆补充因干摩擦而损耗的机械能。

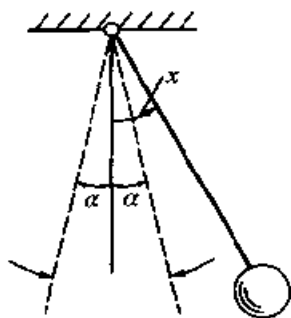


图 3.5 时钟的简化模型

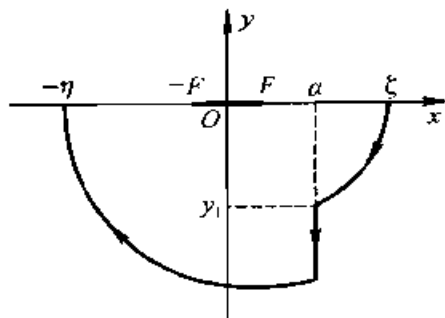


图 3.6 钟摆运动的相轨迹

受干摩擦作用的单摆微幅振动的相轨迹与 § 1.2 中讨论的受干摩擦作用的质量 - 弹簧系统相同。当 $y > 0$ 时是以 $(-F, 0)$ 为圆心的圆, $y < 0$

时,是以 $(F,0)$ 为圆心的圆。设相点从起始位置 $(\xi,0)$ 开始向下方运动(图 3.6),相轨迹方程为

$$y^2 + (x - F)^2 = (\xi - F)^2 \quad (3.2.1)$$

在 $x = \alpha$ 处,摆受冲击前的速度为

$$y_1 = -\sqrt{(\xi - F)^2 - (\alpha - F)^2} \quad (3.2.2)$$

受冲击后,摆有能量增量 ΔE ,即

$$\frac{y_1^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2} + \Delta E = \frac{y_2^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2} \quad (3.2.3)$$

从而导出受冲击后摆的速度:

$$y_2^2 = y_1^2 + 2\Delta E \quad (3.2.4)$$

冲击后,相点从 $(\alpha, -y_2)$ 沿半径增大的圆继续运动,相轨迹方程为

$$y^2 + (x - F)^2 = y_2^2 + (\alpha - F)^2 \quad (3.2.5)$$

将式(3.2.2)和(3.2.4)代入上式,整理为

$$y^2 + (x - F)^2 = (\xi - F)^2 + 2\Delta E \quad (3.2.6)$$

相点到达 x 轴时的坐标为 $(-\eta, 0)$ 。令式(3.2.6)中的 $x = -\eta, y = 0$,求出 η 为

$$\eta = \sqrt{(\xi - F)^2 + 2\Delta E} - F \quad (3.2.7)$$

在平面 (ξ, η) 上作曲线(3.2.7)及直线 $\eta = \xi$ (图 3.7),此二曲线的交点 P 的坐标为

$$\xi_p = \eta_p = \frac{\Delta E}{2F} \quad (3.2.8)$$

若相点从点 $(\xi_p, 0)$ 出发运动,则绕原点一周后必回至原处,形成孤立的封闭相轨迹,即极限环。从图 3.7 可看出,无论相点的初始坐标 ξ 大于或小

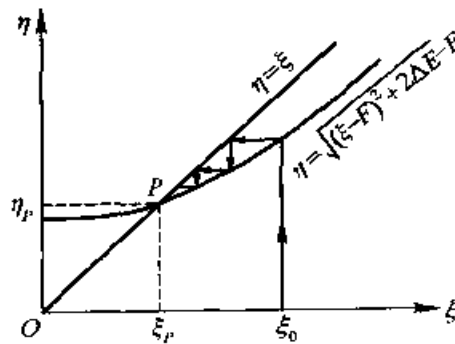


图 3.7 稳定极限环的存在性

于 ξ_P , 以后都朝点 P 趋近。表明极限环内的相轨迹不断向外贴近极限环, 极限环外的相轨迹不断向内贴近极限环, 从而证明极限环是稳定的。这种构造的钟只要受到微小的冲击使摆幅到达 $x = \pm \alpha$ 处接受擒纵机构的冲击, 就能自动产生并维持稳定的周期运动(图 3.8)。

上述自微振动的成因还可以从能量观点解释。设每次冲击的输入能量 ΔE 为常值。由于干摩擦为常值, 每个往复耗散的能量必与摆动幅度成正比。在图 3.9 中作出输入能量及耗散能量随运动幅度的变化曲线, 二曲线的交点即与稳定的自激振动相对应。

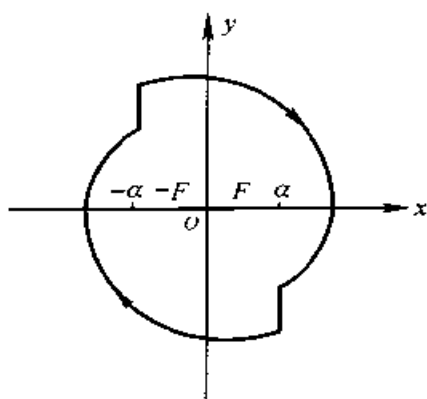


图 3.8 时钟的极限环

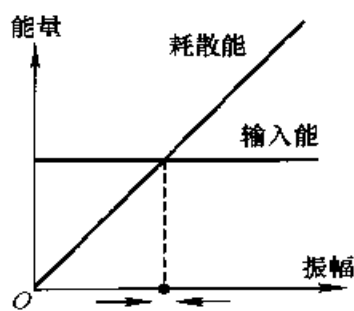


图 3.9 时钟的能量-振幅关系曲线

3.2.2 干摩擦自振

由于摩擦微发引起的自激振动是生活中的常见现象。提琴弓子摩擦琴弦产生的音乐或推门时轴承产生的噪音都是干摩擦自振现象。工程中的典型例子是车刀在切削时产生的振动。要解释这种现象必须考虑滑动摩擦力随相对速度 v 变化的非线性关系 $\varphi(v)$, 如图 3.10 所示。图中表明当静摩擦转化为动摩擦时, 摩擦力突然下降, 然后随相对速度的增加而缓慢地上升。与第一章的图 1.28 比较, 图 3.10 的曲线更接近实际情况。

设振动系统的简化模型为匀速移动平台上的质量-弹簧系统(图 3.11)。不失一般性, 令滑块质量和弹簧刚度系数均等于 1, 弹簧的伸长为 ξ , 平台速度为 v_0 , 滑块与平台之间的相对速度为 v , 则

$$v = \dot{\xi} - v_0 \quad (3.2.9)$$

受干摩擦力和弹簧恢复力作用的滑块运动方程:

$$\ddot{\xi} + \varphi(\dot{\xi} - v_0) + \xi = 0 \quad (3.2.10)$$

令方程(3.2.10)中 $\dot{\xi} = \ddot{\xi} = 0$, 导出滑块的平衡位置:

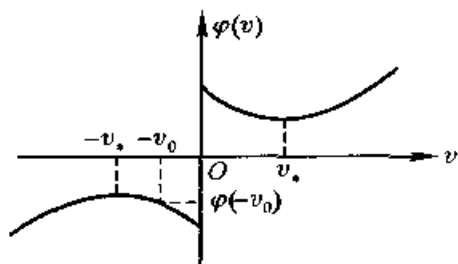


图 3.10 干摩擦与相对速度关系曲线

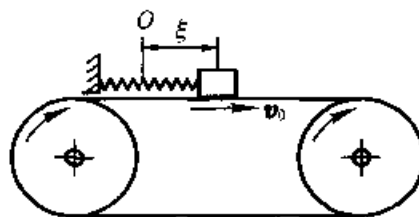


图 3.11 干摩擦自振系统的简化模型

$$\xi_s = -\varphi(-v_0) \quad (3.2.11)$$

以平衡位置 ξ_s 为新的坐标原点, 引入新的变量:

$$x = \xi - \xi_s = \xi + \varphi(-v_0) \quad (3.2.12)$$

则方程(3.2.10)化为

$$\ddot{x} + \phi(\dot{x}) + x = 0 \quad (3.2.13)$$

令 $y = \dot{x}$, 函数 $\psi(y)$ 定义为

$$\psi(y) = \varphi(y - v_0) - \varphi(-v_0) \quad (3.2.14)$$

从图 3.12 所示 $\psi(y)$ 的函数曲线可看出, 在 $y = 0$ 附近的阻尼特性具有负阻尼性质, y 较大时转化为正阻尼。

将方程(3.2.13)写为一阶自治微分方程:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\psi(y) + x}{y} \quad (3.2.15)$$

利用 § 1.2 叙述的列纳作图法描绘方程(3.2.15)的相轨迹。先作出辅助曲线

$$x = -\psi(y) \quad (3.2.16)$$

此曲线即零斜率等倾线(图 3.13 中的虚线)。在原点附近, 零等倾线位于第一、三象限, 类似于图 1.27 的负阻尼情形, 原点处的奇点为不稳定焦点, 对应于不稳定的滑块平衡位置。当滑块因扰动偏离平衡位置时, 相点沿螺旋线向外运动, 振幅不断增大。一旦相点到达辅助曲线的水平段 P_1P_2 , 即沿此线段移动到右边的端点 P_2 , 然后环绕原点一周后再与 P_1P_2 线段相遇, 并再次重复此过程。于是过点 P_2 的相轨迹自然成为相平面内的极限环(图 3.13)。

以上分析说明了干摩擦自振的产生原因。当相点沿线段 P_1P_2 运动时, 滑块相对平台的相对速度为零, 这时平台咬住滑块以速度 v_0 一同匀

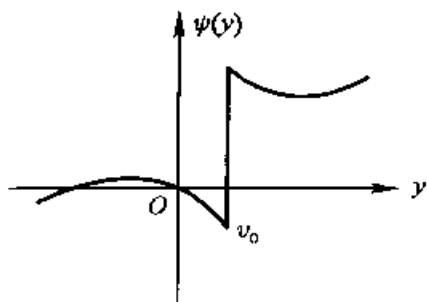
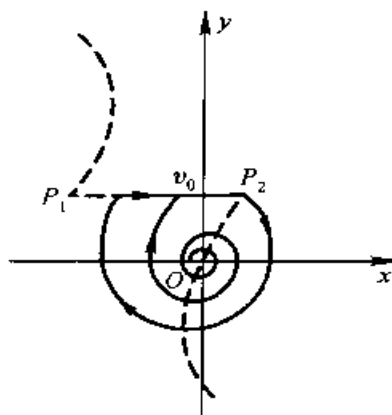
图 3.12 $\psi(y)$ 的函数曲线

图 3.13 干摩擦自激系统的极限环

速运动。待弹簧恢复力随弹簧变形增长得足以克服静摩擦力时,滑块开始相对平台向后滑动,并在摩擦力作用下不断减速,直到相对速度减至零,平台再次咬住滑块,则上述过程重复发生。在此系统中,等速移动的平台将恒定的能源通过滑块与平台之间的干摩擦特性的调节作用输入滑块,使滑块维持稳定的自激振动。

各种实际的干摩擦现象都可以从以上简单模型的分析得到解释。在工程中,滑块与平台之间时而粘住时而滑动的不连续爬行现象,可在机械传动系统中发生。利用润滑剂使干摩擦转化为粘性摩擦,则干摩擦自振现象自然消失。

3.2.3 输电线舞动

被冰层覆盖的输电线在水平阵风作用下可产生强烈的上下抖动,振幅可达一二米而导致严重事故。这种自激振动现象称为输电线舞动。截取一小段电线为集中质量,以无振动时线段的质心平衡位置 O 为原点,建立坐标系(Oxy),质心 C 的垂直坐标为 y (图 3.14)。当风速为 v_0 的水平阵风吹来时,其相对输电线的相对速度 v 为

$$v = v_0 - \dot{y}j \quad (3.2.17)$$

其中 j 为 y 轴的单位矢量。设 α 为攻角,即速度 v 与水平轴 x 的夹角。则有

$$\alpha = \frac{\dot{y}}{v} \quad (3.2.18)$$

由于输电线的圆形断面被冰层覆盖成为非圆形的不规则形状,因此阵风

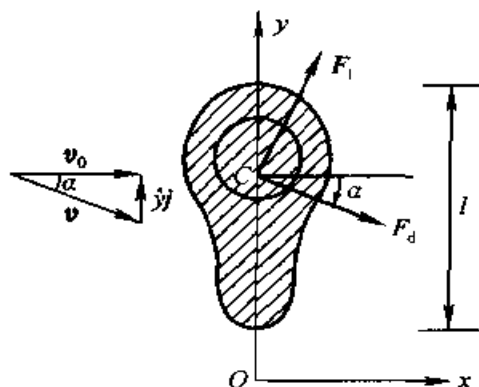


图 3.14 输电线的受力图

对电线不仅产生沿 v 方向的阻力 F_d , 同时产生与 v 垂直的升力 F_L 。根据空气动力学的实验结果, 阻力与升力的变化规律为

$$F_d = c_d l \frac{\rho v_0^2}{2}, \quad F_L = c_L l \frac{\rho v_0^2}{2} \quad (3.2.19)$$

其中 ρ 为空气密度、 l 为断面的特征长度, c_d, c_L 分别为阻力系数和升力系数。小攻角时空气动力沿 y 轴的垂直分量 F_y 近似为

$$F_y = F_L + F_d \alpha = c_y l \frac{\rho v_0^2}{2} \quad (3.2.20)$$

其中

$$c_y = c_L + c_d \alpha \quad (3.2.21)$$

c_y 随攻角 α 变化的非线性规律如图 3.15 所示, 代入式 (3.2.20) 后, F_y 随 α 的变化可近似以三次多项式模拟:

$$F_y = a\alpha - b\alpha^3 \quad (3.2.22)$$

设 m 为线段的质量, 线段两端拉力合成的弹性恢复力的刚度系数为 k , 风力 F_y 以式 (3.2.22) 表示, 其中的攻角 α 以式 (3.2.18) 代入, 导出输电线段在风力作用下沿 y 轴运动的动力学方程为瑞利方程:

$$\ddot{y} - \epsilon \dot{y} (1 - \delta \dot{y}^2) + \omega_0^2 y = 0 \quad (3.2.23)$$

其中

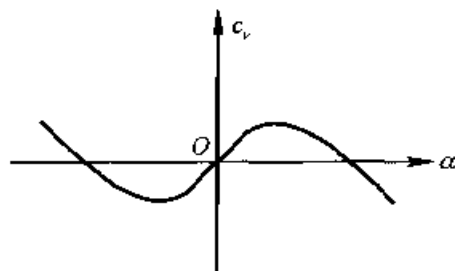


图 3.15 空气动力系数与攻角关系曲线

$$\epsilon = \frac{a}{mv_0}, \quad \delta = \frac{b}{av_0^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.2.24)$$

因此输电线舞动现象可用瑞利方程的极限环解释。在输电线上安装各种类型的阻尼器以增强阻尼作用可消除舞动现象。高层建筑物或大跨度桥梁在风载荷作用下的振动是与输电线舞动类似的自激振动。飞机高速飞行时机翼可发生强烈颤动,称为机翼的颤振,其成因也与此类似。

3.2.4 管内流体喘振

输水管道系统内的流体在一定流速范围内发生的强烈振动也是一种自激振动。拧开水龙头时自来水管内的水流与水管的耦合振动常伴随强烈的噪音。这种自激振动称为**流体喘振**。设水泵通过导管1将水注入容器2(图3.16),导管的长度为 l ,容器内的水面高度为 h ,导管和容器的横截面积分别为 S_1 和 S_2 ,导管左右两端的压强分别为 p_1 和 p_2 ,水的密度为 ρ ,流速为 v ,管内阻力为 F_d ,利用动量定理列写管内水流的动力学方程:

$$\rho l S_1 \dot{v} = S_1(p_1 - p_2) - F_d \quad (3.2.25)$$

管内水流的流量为 $q = S_1 v$,水泵的输出水流的压强 p_1 和阻力 F_d 均为流量 q 的函数。令

$$S_1 p_1(q) - F_d(q) = f(q) \quad (3.2.26)$$

函数 $f(q)$ 的实验曲线如图3.17所示。导管与容器连接处的压强 p_2 取决于容器内的水面高度 h ,

$$p_2 = \rho gh \quad (3.2.27)$$

设 q_0 为容器的出水流量,则流体的连续性要求

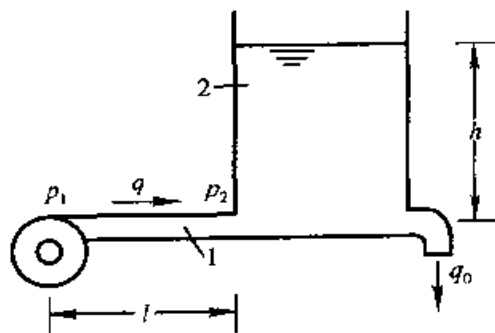


图 3.16 输水管道系统的简化模型

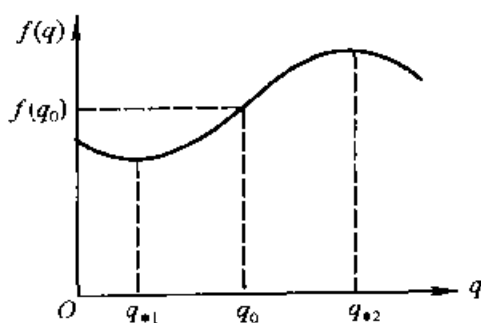


图 3.17 $f(q)$ 函数特性曲线

$$S_2 \dot{h} = q - q_0 \quad (3.2.28)$$

将方程(3.2.25)各项对 t 求导,并将式(3.2.26),(3.2.27)和(3.2.28)代入,化为

$$\ddot{q} - \frac{f'(q)}{\rho l} \dot{q} + \frac{S_1 g}{S_2 l} (q - q_0) = 0 \quad (3.2.29)$$

令 $\dot{q} = \ddot{q} = 0$, 导出 q 的稳态值为 $q = q_0$, 此时进入容器与流出容器的流量完全相等,若图 3.17 中 q_0 对应的函数值 $f(q_0)$ 恰好位于特性曲线的斜率为正的拐点处,则在 $q = q_0$ 附近,函数 $f(q)$ 可近似表示为

$$f(q) = f(q_0) + a(q - q_0) - b(q - q_0)^3 \quad (3.2.30)$$

令 $x = q - q_0$, 方程(3.2.29)即化作范德波尔方程:

$$\ddot{x} - \epsilon \dot{x}(1 - \delta x^2) + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.2.31)$$

其中

$$\epsilon = \frac{a}{\rho l}, \quad \delta = \frac{3b}{a}, \quad \omega_0^2 = \frac{S_1 g}{S_2 l} \quad (3.2.32)$$

因此喘振现象也可用范德波尔方程的极限环解释。在输水管道系统的设计中应避免正常流量 q_0 与特性曲线 $f(q)$ 的正斜率相对应,以防止管内流体的喘振。

§ 3.3 自激振动的定性分析

3.3.1 拟简谐振动与张弛振动

在上述几种自激振动的实例中,输电线舞动和管道流体喘振的数学模型都是瑞利方程或范德波尔方程。在 § 1.4 中已经证明,瑞利方程或范德波尔方程可产生稳定的极限环。极限环的几何形状取决于非线性参数 ϵ 的大小。当 ϵ 足够小时,系统接近线性,零斜率等倾线与 y 轴接近重合,极限环的形状接近于圆形,自激振动接近于简谐振动,可称为拟简谐振动。随着 ϵ 的增大,极限环逐渐歪扭,自激振动的波形逐渐偏离简谐振动,甚至接近于断续曲线(图 3.18)。

讨论 $\epsilon \rightarrow \infty$ 的极限情形。引入新的变量 $\xi = x/\epsilon$, 将方程(1.4.3)化为

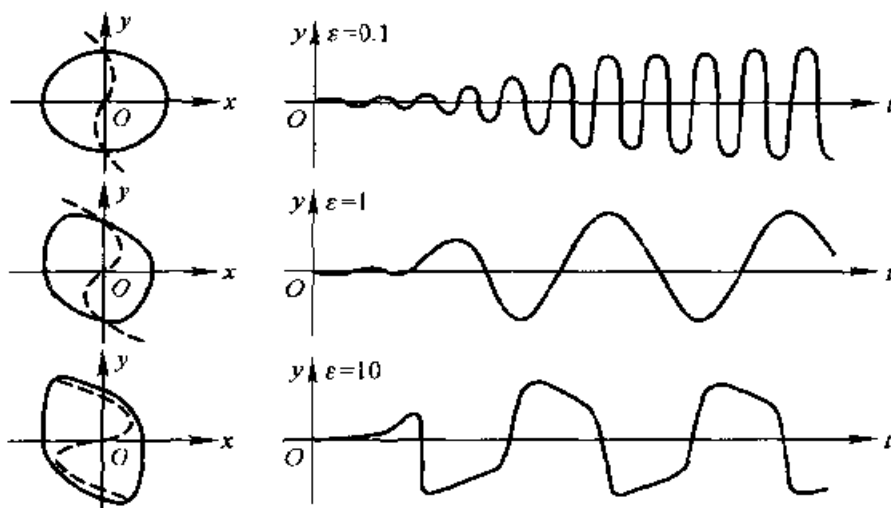


图 3.18 拟简谐振动与张弛振动

$$\frac{dy}{d\xi} = \epsilon^2 \frac{y(1 - \delta y^2) - \xi}{y} \quad (3.3.1)$$

当 $\epsilon \rightarrow \infty$ 时, (ξ, y) 相平面内除了零斜率等倾线上各点的斜率为零外, 向量场的每一点的斜率都接近于无穷大。因此, 极限环只能由零斜率等倾线的一部分与两条垂直线组成, 而具有图 3.19 所示的形状。相应的 y 波形为断续的, x 波形为锯齿形。这种与简谐振动完全不同的周期运动称为张弛振动。

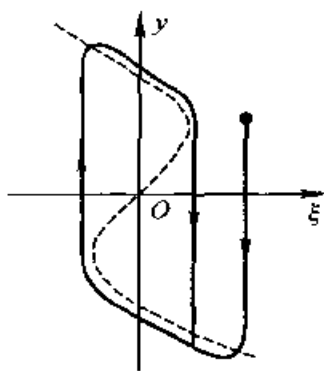


图 3.19 张弛振动的极限环

3.3.2 张弛振动的物理解释

从能量观点出发, 对拟简谐振动和张弛振动进行比较。 ϵ 足够小时, 自振系统与保守系统十分接近。保守系统的总机械能由动能和势能组成, 在振动过程中能量在动能和势能两个储能器之间周期性交换, 表现为振动的简谐性。接近保守系统的自振系统的波形自然也接近简谐。当 ϵ 极大时, 动力学方程的惯性项可近似地忽略, 也可以认为系统总机械能中的动能部分可以忽略。系统只有一个势能储能器, 因此自激振动只有两个阶段, 即储能与放能。整个过程是张与弛的交替, 表现为断续的张弛振动。

可用一个直观模型解释张弛振动(图 3.20)。将虹吸管嵌在漏斗的塞子中, 水自水龙头注入漏斗, 当水位达到一定高度时, 虹吸管开始作用,

水由漏斗流出,待水位降到一定高度时,虹吸管停止作用,漏斗又重新积水。水量作锯齿形振荡,总流量作断续振荡。这种张弛振动可从自然界中的间歇泉中观察到。

再以干摩擦自振为例。当滑块与平台粘着时,滑块的动能固定不变,而弹簧势能不断增加,成为单储能器系统,振动为张弛性。但当弹簧恢复力大于静摩擦力时,滑块跳脱平台作相对滑动,系统又成为双储能器系统,振动接近简谐性。因此,干摩擦自振为简谐振动与张弛振动的综合。 v_0 较大时接近于简谐振动, v_0 很小时接近于张弛振动。

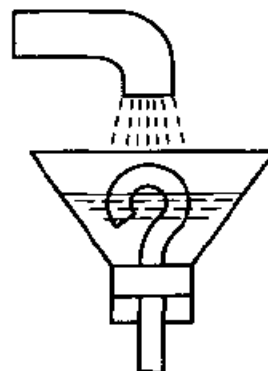


图 3.20 张弛振动的物理模型

3.3.3 动态分岔

研究干摩擦自振现象时,可以发现,当平台以很大速度 v_0 运动时,不能激发起滑块的自激振动,滑块在弹簧和干摩擦作用下,在平衡位置附近只能作衰减振动。当 v_0 减小到某个临界值时,稳定的平衡状态突然变得不稳定而转化为自激振动。这种运动状态随参数变化而发生突变的现象称为动态分岔。上述衰减振动向自激振动的转化在相平面内对应于稳定焦点向不稳定焦点伴随极限环的转变。这种特殊的动态分岔称为霍普夫(E. Hopf)分岔。

要说明动态分岔现象,必须分析图 3.12 的阻尼特性曲线 $\psi(y)$ 。可以看出,原点附近的负阻尼只发生于 v_0 较小的情形。若增大 v_0 使原点附近的斜率从负值变为正值,则相平面内的零斜率等倾线移至第二、四象限,从点 P_2 出发的相轨迹必向原点趋近,奇点成为稳定焦点(图 3.21)。将图 3.10 中 $\varphi(v)$ 曲线的极小值对应的平台速度记为 v_* ,则 v_* 即成为 v_0 的分岔点。

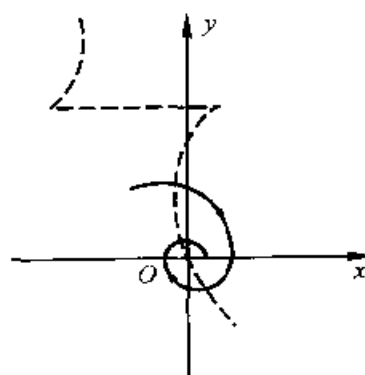


图 3.21 干摩擦作用下的衰减振动

类似现象也可在管流喘振问题中发生。

将图 3.17 中 $f(q)$ 曲线的极小值对应的流量记为 q_{*1} 。极大值对应的流量记作 q_{*2} ,当 $q_0 < q_{*1}$ 或 $q_0 > q_{*2}$ 时将使 $f(q)$ 曲线的斜率变为负值。方程(3.2.29)中出现正阻尼项,流体在管内作衰减振动,喘振现象不能发

生。 q_{*1} 和 q_{*2} 即成为 q_0 的分岔点。

动态分岔问题还将在第五章中作更详细的分析。

§ 3.4 自激振动的定量计算

3.4.1 谐波平衡法

利用第二章中的各种近似解析方法可以对自激振动的频率和振幅作定量计算。以范德波尔方程作为典型的自激振动数学模型,首先利用谐波平衡法作近似计算。令方程(1.4.2)中的参数 $\delta=1$,写为

$$\ddot{x} - \epsilon \dot{x}(1 - x^2) + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.4.1)$$

只取一次谐波,设自激振动解为

$$x = A \sin \omega t \quad (3.4.2)$$

代入方程(3.4.1),化为

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A \sin \omega t - \epsilon \omega A \left(1 - \frac{1}{4}A^2\right) \cos \omega t + \dots = 0 \quad (3.4.3)$$

省略号表示超过一次的其他高次谐波。从上式导出自激振动的频率和振幅的近似值:

$$\omega = \omega_0, \quad A = 2 \quad (3.4.4)$$

表明自激振动频率 ω 的近似值等于 $\epsilon=0$ 时派生的线性系统的固有频率 ω_0 。

3.4.2 平均法

令范德波尔方程(1.4.2)中 $\delta=1$,写为

$$\ddot{x} - \epsilon \dot{x}(1 - x^2) + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.4.5)$$

即 $f(x, \dot{x}) = \dot{x}(1 - x^2)$ 。近似以派生系统的固有频率 ω_0 为自激振动的频率,令 $x = a \cos(\omega_0 t - \theta)$,代入式(2.4.9),积分得到

$$P = 0, \quad Q = -a\omega_0 \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \quad (3.4.6)$$

代入方程组(2.4.8),得到

$$\dot{a} = \frac{\epsilon a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4}\right), \quad \dot{\theta} = 0 \quad (3.4.7)$$

积分得到

$$a = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1\right)e^{-\epsilon t}}}, \quad \theta = \theta_0 \quad (3.4.8)$$

其中 a_0 和 θ_0 为积分常数。令 $t \rightarrow \infty$, 只要 $a_0 \neq 0$, a 必趋向于稳定值 2, 且与初始条件无关, 从而证明范德波尔方程存在稳定的极限环。自激振动的振幅为 $\lim_{t \rightarrow \infty} a = 2$, 与用谐波平衡法的计算结果 (3.4.4) 一致, 而式 (3.4.8) 给出了极限环的形成过程。 θ 保持常值, 表明在一次近似精度范围内的计算结果对频率无修正。

利用式 (2.4.13) 还可写出自激振动的谐波线性化方程:

$$\ddot{x} - \epsilon \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \dot{x} + x = 0 \quad (3.4.9)$$

当 $a < 2$ 时此线性系统为负阻尼, $a > 2$ 时为正阻尼, 也可解释稳定极限环形成的物理原因。

3.4.3 多尺度法

为适当简化计算, 令方程 (1.4.2) 中的 $\omega_0 = 1$ 和 $\delta = 1$, 写为

$$\ddot{x} - \epsilon \dot{x}(1 - x^2) + x = 0 \quad (3.4.10)$$

讨论二次近似解。将式 (2.5.8), (2.5.4) 和 (2.5.5) 代入方程 (3.4.10), 令 ϵ 的同次幂系数为零, 得到以下线性偏微分方程组:

$$D_0^2 x_0 + x_0 = 0 \quad (3.4.11a)$$

$$D_0^2 x_1 + x_1 = -2D_0 D_1 x_0 + D_0 x_0(1 - x_0^2) \quad (3.4.11b)$$

$$D_0^2 x_2 + x_2 = -2D_0 D_1 x_1 - D_1^2 x_0 - 2D_0 D_2 x_0 - 2x_0 x_1 D_0 x_0 + (1 - x_0^2)(D_0 x_1 + D_1 x_0) \quad (3.4.11c)$$

方程 (3.4.11a) 的解与式 (2.5.11) 相同

$$x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + \bar{A}(T_1, T_2)e^{-iT_0} \quad (3.4.12)$$

代入方程 (3.4.11b) 的右边, 得到

$$D_0^2 x_1 + x_1 = -i(2D_1 A - A + A^2 \bar{A})e^{iT_0} - iA^3 e^{3iT_0} + cc \quad (3.4.13)$$

为避免久期项出现, 要求

$$2D_1 A - A + A^2 \bar{A} = 0 \quad (3.4.14)$$

则从方程 (3.4.13) 解出

$$x_1 = \frac{1}{8}iA^3e^{3iT_0} + cc \quad (3.4.15)$$

将式(3.4.12)和(3.4.15)代入方程(3.4.11c)的右边,得到

$$\begin{aligned} D_0^2 x_2 + x_2 = & - \left(2iD_2 A - \frac{1}{4}A + A^2 \bar{A} - \frac{7}{8}A^3 \bar{A}^2 \right) e^{iT_0} + \\ & \frac{1}{8}(2A^3 + A^4 \bar{A})e^{3iT_0} + \frac{5}{8}A^5 e^{5iT_0} + cc \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

无久期项条件要求

$$2iD_2 A - \frac{1}{4}A + A^2 \bar{A} - \frac{7}{8}A^3 \bar{A}^2 = 0 \quad (3.4.17)$$

则方程(3.4.16)的解为

$$x_2 = -\frac{1}{64}(2A^3 + A^4 \bar{A})e^{3iT_0} - \frac{5}{192}A^5 e^{5iT_0} + cc \quad (3.4.18)$$

为确定复函数 A ,从条件(3.4.14)和(3.4.17)解出 $D_1 A$ 和 $D_2 A$ 代入式(2.5.18)表示的 A 对 t 的导数,

$$\frac{dA}{dt} = D_0 A + \epsilon D_1 A + \epsilon^2 D_2 A \quad (3.4.19)$$

得到 A 应满足的常微分方程:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\epsilon}{2}(A - A^2 \bar{A}) - \frac{i\epsilon^2}{2} \left(\frac{1}{4}A - A^2 \bar{A} + \frac{7}{8}A^3 \bar{A}^2 \right) \quad (3.4.20)$$

将复函数 A 写成与式(2.5.20)相同的指数形式:

$$A(t) = \frac{1}{2}a(t)e^{i\theta(t)} \quad (3.4.21)$$

代入方程(3.4.20),将实虚部分开,得到

$$\dot{a} = \frac{\epsilon a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) \quad (3.4.22a)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\epsilon^2}{8} \left(1 - a^2 + \frac{7a^4}{32} \right) \quad (3.4.22b)$$

将方程(3.4.22a)两边乘以 a ,可化为

$$\frac{d(a^2)}{4 - a^2} + \frac{d(a^2)}{a^2} = \epsilon dt \quad (3.4.23)$$

积分得到

$$\ln \left(\frac{4 - a_0^2}{4 - a^2} \right) + \ln \left(\frac{a^2}{a_0^2} \right) = \epsilon t \quad (3.4.24)$$

整理后得到

$$a = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1\right)e^{-\epsilon t}}} \quad (3.4.25)$$

方程(3.4.22b)可利用方程(3.4.22a)改写为

$$\dot{\theta} = -\frac{\epsilon^2}{16} - \frac{\epsilon}{8a} \left(1 - \frac{7a^2}{4}\right) \dot{a} \quad (3.4.26)$$

可积分得到

$$\theta = -\frac{\epsilon^2}{16}t + \frac{\epsilon}{8} \ln a + \frac{7}{64}\epsilon a^2 + \theta_0 \quad (3.4.27)$$

将式(3.4.25)和(3.4.27)代入式(3.4.21),再代入式(3.4.12), (3.4.15)和(3.4.18)等式,最终由式(2.5.8)得到范德波尔方程的二次近似解为

$$x = a \cos \psi - \frac{\epsilon a^3}{32} \sin 3\psi - \frac{\epsilon^2 a^3}{1024} \left[(8 + a^2) \cos 3\psi + \frac{5a^2}{3} \cos 5\psi \right] \quad (3.4.28)$$

其中

$$\psi = t + \theta \quad (3.4.29)$$

a 和 θ 的变化规律分别由式(3.4.25)和(3.4.27)给出。其中的振幅变化规律(3.4.25)与用谐波平衡法计算的式(3.4.8)完全一致。将式(3.4.29)对 t 求导,设振幅保持稳态值 a_0 ,从式(3.4.22b)导出自激振动的频率为

$$\omega = \dot{\psi} = 1 - \frac{\epsilon^2}{8} \left(1 - a_0^2 + \frac{7a_0^4}{32}\right) + \dots \quad (3.4.30)$$

上式为考虑二次近似精度时对自激振动频率的修正。用多尺度法不仅能算出振幅和频率,而且能导出近似解(3.4.28)以定量地描述自激振动的运动过程。

3.4.4 KBM 法

仍令范德波尔方程(1.4.2)中 $\omega_0 = 1$ 和 $\delta = 1$, 写为

$$\ddot{x} - \epsilon \dot{x}(1 - x^2) + x = 0 \quad (3.4.31)$$

即

$$f(x, \dot{x}) = \dot{x}(1 - x^2), \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -2x\dot{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 1 - x^2 \quad (3.4.32)$$

将 $x = a \cos \psi$, $\dot{x} = -a \sin \psi$ 代入式(2.6.14a), 整理后得到

$$f_0(a, \psi) = a \left(\frac{a^2}{4} - 1 \right) \sin \psi + \frac{a^3}{4} \sin 3\psi \quad (3.4.33)$$

代入方程(2.6.13a), 得到

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 = \left(2A_1 - a + \frac{a^3}{4} \right) \sin \psi + 2aB_1 \cos \psi + \frac{a^3}{4} \sin 3\psi \quad (3.4.34)$$

周期解条件要求

$$A_1 = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right), \quad B_1 = 0 \quad (3.4.35)$$

解出

$$x_1 = -\frac{a^3}{32} \sin 3\psi \quad (3.4.36)$$

将上式代入式(2.6.14b), 整理后得到

$$f_1(a, \psi) = \left[\frac{a}{4} (1 - a^2) + \frac{7a^5}{128} \right] \cos \psi + \frac{a^3}{128} (8 + a^2) \cos 3\psi + \frac{5a^5}{128} \cos 5\psi \quad (3.4.37)$$

代入方程(2.6.13b), 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi^2} + x_2 = & \left(2aB_2 + \frac{a}{4} (1 - a^2) + \frac{7a^5}{128} \right) \cos \psi + \\ & 2A_2 \sin \psi + \frac{a^3}{128} (8 + a^2) \cos 3\psi + \frac{5a^5}{128} \cos 5\psi \end{aligned} \quad (3.4.38)$$

周期解条件要求

$$A_2 = 0, \quad B_2 = -\frac{1}{8} \left(1 - a^2 + \frac{7a^4}{32} \right) \quad (3.4.39)$$

解出

$$x_2 = -\frac{a^3}{1024} (8 + a^2) \cos 3\psi - \frac{5a^5}{3072} \cos 5\psi \quad (3.4.40)$$

继续计算至满足精度要求, 得到

$$x = a \cos \psi - \frac{\epsilon a^3}{32} \sin 3\psi - \frac{\epsilon^2 a^3}{1024} \left[(8 + a^2) \cos 3\psi + \frac{5a^2}{3} \cos 5\psi \right] + \dots \quad (3.4.41)$$

以及 a 和 ψ 应满足的微分方程:

$$\dot{a} = \frac{\epsilon a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) + \dots \quad (3.4.42)$$

$$\dot{\psi} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{8} \left(1 - a^2 + \frac{7a^4}{32} \right) + \dots \quad (3.4.43)$$

与式(3.4.22)完全一致。从方程(3.4.42)积分得到与式(3.4.25)相同的振幅变化规律:

$$a = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1 \right) e^{-\varepsilon t}}} \quad (3.4.44)$$

当振幅保持稳态值 a_0 时,从式(3.4.43)导出自激振动的频率为

$$\omega = 1 - \frac{\varepsilon^2}{8} \left(1 - a_0^2 + \frac{7a_0^4}{32} \right) + \dots \quad (3.4.45)$$

与用多尺度法算出的式(3.4.30)完全一致。

§ 3.5 自激系统的受迫振动

3.5.1 远离共振的受迫振动

讨论用范德波尔方程表达的自激系统在简谐激励下的受迫振动。设激励频率 ω 远离派生系统的固有频率 ω_0 , 动力学方程为

$$\ddot{x} - \varepsilon \dot{x}(1 - x^2) + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t \quad (3.5.1)$$

利用多尺度法,只考虑一次近似,令

$$x(t, \varepsilon) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) \quad (3.5.2)$$

将式(3.5.2)和式(2.5.4), (2.5.5)代入方程(3.5.1), 导出以下线性方程组:

$$D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = F_0 \cos \omega t \quad (3.5.3a)$$

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = [(1 - x_0^2)D_0 - 2D_0 D_1]x_0 \quad (3.5.3b)$$

方程(3.5.3a)的零次近似解为频率 ω_0 的自由振动解与频率 ω 的受迫振动解的叠加。其复数形式为

$$x_0 = A(T_1)e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega_0 T_0} + \Delta e^{i\omega T_0} + \bar{\Delta} e^{-i\omega T_0} \quad (3.5.4)$$

其中 A 为表示自由振动振幅的未知复函数, Δ 为复数形式的受迫振动振幅, \bar{A} 和 $\bar{\Delta}$ 为 A 和 Δ 的共轭复数, 且有

$$|\Delta| = \frac{F_0}{2(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.5.5)$$

将零次近似解(3.5.4)代入一次近似方程(3.5.3b)的右边,整理后得到

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = & i\omega_0 \{ [-2D_1 A + A(1 - 2\Lambda\bar{A} - A\bar{A})] e^{i\omega_0 T_0} - A^3 e^{i3\omega_0 T_0} \} + \\ & i\omega [\Lambda(1 - \Lambda\bar{A} - 2A\bar{A}) e^{i\omega T_0} - \Lambda^3 e^{i3\omega T_0}] - \\ & iA^2 [(2\omega_0 + \omega) \Lambda e^{i(2\omega_0 + \omega) T_0} + (2\omega_0 - \omega) \bar{\Lambda} e^{i(2\omega_0 - \omega) T_0}] - \\ & iA^2 [(2\omega + \omega_0) A e^{i(2\omega + \omega_0) T_0} + (2\omega - \omega_0) \bar{A} e^{i(2\omega - \omega_0) T_0}] + cc \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

从方程(3.5.6)可看出,系统在频率 ω 的简谐激励下,除产生派生系统固有频率 ω_0 的自由振动和激励频率 ω 的受迫振动以外,还可产生 $3\omega_0, 3\omega$ 等倍频响应,以及 $2\omega_0 + \omega, 2\omega_0 - \omega, 2\omega + \omega_0, 2\omega - \omega_0$ 等组合频率响应。表明系统除可产生 $\omega \approx \omega_0$ 时的主共振以外,还可能出现 $\omega \approx 3\omega_0$ 时的亚谐波共振,以及 $\omega \approx \omega_0/3$ 时的超谐波共振。对于非共振情形,为避免方程出现久期项,复函数 A 必须满足以下条件:

$$-2D_1 A + A(\eta - A\bar{A}) = 0 \quad (3.5.7)$$

其中

$$\eta = 1 - 2\Lambda\bar{A} = 1 - \frac{F_0^2}{2(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (3.5.8)$$

由于 $D_0 A = 0$,从式(2.5.18)和(3.5.7)导出一次近似意义下 A 的微分方程:

$$\frac{dA}{dt} = \epsilon D_1 A = \frac{1}{2} \epsilon A (\eta - A\bar{A}) \quad (3.5.9)$$

将复函数 A 表示为式(2.5.20)的指数形式:

$$A = \frac{a}{2} e^{i\theta} \quad (3.5.10)$$

代入方程(3.5.9),将实部和虚部分开,得到以下方程组:

$$\dot{a} = \frac{1}{2} \epsilon a \left(\eta - \frac{a^2}{4} \right) \quad (3.5.11a)$$

$$\dot{\theta} = 0 \quad (3.5.11b)$$

将方程(3.5.11a)两边乘以 a ,化为

$$\frac{d(a^2)}{4\eta - a^2} + \frac{d(a^2)}{a^2} = \epsilon \eta dt \quad (3.5.12)$$

积分后导出

$$a = 2 \sqrt{\frac{\eta}{1 + \left[\frac{4\eta}{a_0^2} - 1 \right] e^{-\epsilon \eta}}} \quad (3.5.13)$$

方程(3.5.11b)的积分为

$$\theta = \theta_0 \quad (3.5.14)$$

将式(3.5.13)和(3.5.14)代入式(3.5.10),再代入方程(3.5.6)的右边,可以看出,一次近似解的稳态运动取决于参数 η 的符号。当 $\eta < 0$, 即 $F_0 > \sqrt{2}|\omega_0^2 - \omega^2|$ 时,随着 $t \rightarrow \infty$, a 趋近于零,表明自由振动趋于衰减,范德波方程(3.5.1)受激励后的稳态运动为 ω 频率的受迫振动。若 $\eta > 0$, 即 $F_0 < \sqrt{2}|\omega_0^2 - \omega^2|$, 则随着 $t \rightarrow \infty$, a 朝 $2\sqrt{\eta}$ 趋近。表明稳态运动中除受迫振动以外,还包含 ω_0 频率的稳态自由振动。由于一般情况下 ω 与 ω_0 不可通约,此稳态运动为非周期的。上述大激励力引起自由振动衰减,小激励力产生稳态自由振动的结论明显不同于 § 2.1 中关于达芬系统受迫振动的分析。达芬系统的自由振动与激励无关,而范德波尔系统由于激励引起的受迫振动会通过非线性项对运动进行反馈,从而增强了阻尼作用,使自由振动受到抑制。

3.5.2 接近共振的受迫振动

讨论带微弱阻尼的范德波尔系统接近共振的受迫振动。设激励力的幅值与 ϵ 同数量且 $\omega_0 = 1$, 动力学方程为

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = \epsilon F_0 \cos \omega t \quad (3.5.15)$$

由于 ω 与 ω_0 接近,令 $\omega^2 = 1 + \epsilon\sigma_1$ 。利用平均法,将方程(3.5.15)写为

$$\ddot{x} + x = \epsilon[f(x, \dot{x}) + F_0 \cos \omega t] \quad (3.5.16)$$

其中

$$f(x, \dot{x}) = (1 - x^2)\dot{x} \quad (3.5.17)$$

令 $x = a \cos(\omega t - \theta)$, 代入式(2.4.24), 积分得到

$$\Phi(a, \omega) = a\omega \left(\frac{a^2}{4} - 1 \right), \quad \Psi(a, \omega) = \sigma_1 a \quad (3.5.18)$$

代入式(2.4.28), 得到幅频特性关系式:

$$a_s^2 \left[\omega^2 \left(\frac{a_s^2}{4} - 1 \right)^2 + \sigma_1^2 \right] = F_0^2 \quad (3.5.19)$$

在上一节中已算出自激振动的振幅为 $a_0 = 2$ 。将上式各项除以 $a_0^2 \omega^2$, 化为

$$W(\rho, \sigma) = \rho[(1 - \rho)^2 + \sigma^2] - \alpha = 0 \quad (3.5.20)$$

其中

$$\rho = \left(\frac{a_s}{a_0}\right)^2, \quad \sigma = \frac{\sigma_1}{\omega}, \quad \alpha = \left(\frac{F_0}{a_0 \omega}\right)^2 \quad (3.5.21)$$

方程(3.5.20)在参数 (σ, ρ) 平面内作出以 α 为参数的幅频特性曲线(图 3.22)。其中稳定区与不稳定区的分界线应满足 $\partial W / \partial \rho = 0$ 。根据式(3.5.20)算出的分界线为图 3.22 中的椭圆, 椭圆方程为

$$\sigma^2 + (1 - \rho)(1 - 3\rho) = 0 \quad (3.5.22)$$

此椭圆所围区域为不稳定区域。此外, 若本征方程(2.5.30)中的系数 $a_1 < 0$, 则稳态周期运动亦不稳定。此条件可利用式(2.4.33)对 a_1 的定义写为

$$\frac{1}{a_s} \left[\frac{\partial(a\Phi)}{\partial a} \right]_s = \omega(a_s^2 - 2) < 0 \quad (3.5.23)$$

即 $a_s < \sqrt{2}$ 或 $\rho < 1/2$ 。因此图 3.22 中 $\rho = 1/2$ 直线以下的区域亦不稳定。只有稳定域中的幅频曲线才是物理上可实现的状态。在激励频率 ω 与固有频率 ω_0 接近的过程中, 当频率差 $\omega - \omega_0$ 减小到某个临界值时, 尽管 ω 与 ω_0 并不严格相等, 仍可出现与激励频率相同且振幅足够大的稳态受迫振动。这种响应频率向激励频率靠近的现象称为同步现象。惠更斯最早发现两只挂钟相靠近时的同步现象。在电子技术中同步现象得到实际应用, 例如利用一个频率高度稳定的石英振子使一个振动系统与它同步

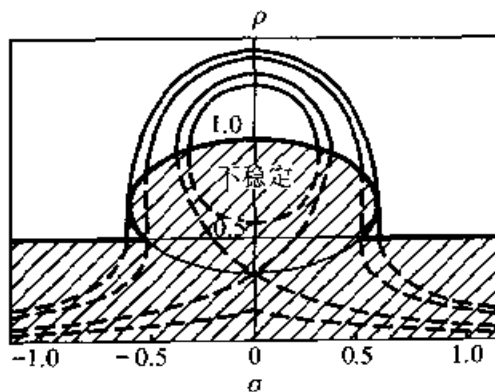


图 3.22 范德波尔方程的幅频特性曲线

而构成石英钟。从更普遍的意义理解,月球的自转频率与绕地球的公转频率严格相同也可用同步现象加以解释。

§ 3.6 多自由度系统的自激振动

3.6.1 电子管振荡器

范德波尔关于自激振动问题的研究来自对电子管振荡回路的分析。图 3.23 所示的电子管振荡器由互相耦合的两个回路组成。回路 1 为由

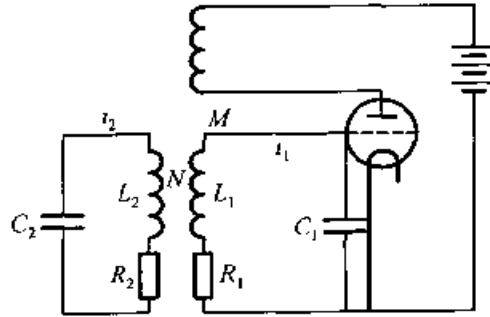


图 3.23 电子管振荡器

电容 C_1 、电感 L_1 、电阻 R_1 和电子管组成的栅极电路。回路 2 由电容 C_2 、电感 L_2 和电阻 R_2 组成。 L_1 与 L_2 之间的电感系数为 N 的互感作用使二回路之间产生耦合。此外,板极电路与栅极电路之间也存在电感系数为 M 的耦合作用。设二回路的电流分别为 i_1 和 i_2 ,板极电流为 i_a ,利用基尔霍夫 G. R. (Kirchhoff) 定律分别列写二回路的电路微分方程:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt = M \frac{di_a}{dt} + N \frac{di_2}{dt} \quad (3.6.1a)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2 dt = N \frac{di_1}{dt} \quad (3.6.1b)$$

设 u_1, u_2 为电容 C_1 和 C_2 两端的电压降,则有

$$u_k = \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k dt \quad (k = 1, 2) \quad (3.6.2)$$

板极电流 i_a 受到栅压 u_1 的控制,是 u_1 的非线性函数:

$$i_a = au_1 - bu_1^3 \quad (3.6.3)$$

利用式(3.6.2), (3.6.3)将方程组(3.6.1)化为 u_1, u_2 的借互感系数 N

耦合的微分方程组:

$$L_1 C_1 \ddot{u}_1 + R_1 C_1 \dot{u}_1 + u_1 = M(a - 3bu_1^2) \dot{u}_1 + NC_2 \dot{u}_2 \quad (3.6.4a)$$

$$L_2 C_2 \ddot{u}_2 + R_2 C_2 \dot{u}_2 + u_2 = NC_1 \dot{u}_1 \quad (3.6.4b)$$

引入新的变量 x_1, x_2 , 此方程组可化为

$$\ddot{x}_1 - \lambda_1 \ddot{x}_2 + \omega_{10}^2 x_1 = \epsilon(1 - x_1^2) \dot{x}_1 \quad (3.6.5a)$$

$$\ddot{x}_2 - \lambda_2 \ddot{x}_1 + \omega_{20}^2 x_2 = -\epsilon \beta \dot{x}_2 \quad (3.6.5b)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} x_k &= \sqrt{\frac{3Mb}{Ma - R_1 C_1}} u_k, \quad \omega_{k0}^2 = \frac{1}{L_k C_k} \quad (k = 1, 2) \\ \epsilon &= \frac{1}{L_1} \left(\frac{Ma}{C_1} - R_1 \right), \quad \beta = \frac{L_1 C_1 R_2}{L_2 (Ma - R_1 C_1)}, \quad \lambda_1 = \frac{NC_2}{L_1 C_1}, \quad \lambda_2 = \frac{NC_1}{L_2 C_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.6.6)$$

3.6.2 自激振动的定量计算

先讨论 $\epsilon = 0$ 时的派生系统。设 x_{10}, x_{20} 为派生系统的解, 应满足以下零次近似方程:

$$\ddot{x}_{10} - \lambda_1 \ddot{x}_{20} + \omega_{10}^2 x_{10} = 0 \quad (3.6.7a)$$

$$\ddot{x}_{20} - \lambda_2 \ddot{x}_{10} + \omega_{20}^2 x_{20} = 0 \quad (3.6.7b)$$

此线性微分方程组存在以下特解:

$$x_{10} = A \cos \omega_0 t, \quad x_{20} = \phi A \cos \omega_0 t \quad (3.6.8)$$

其中 ω_0 为派生系统的固有频率, 是以下本征方程的解:

$$(1 - \lambda_1 \lambda_2) \omega_0^4 - (\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2) \omega_0^2 + \omega_{10}^2 \omega_{20}^2 = 0 \quad (3.6.9)$$

此 4 次代数方程的 4 个根对应于派生系统的 4 个线性无关特解, 可用于构成一般解。式(3.6.8)中的模态参数 ϕ 为

$$\phi = \frac{\omega_0^2 - \omega_{10}^2}{\lambda_1 \omega_0^2} = \frac{\lambda_2 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_{20}^2} \quad (3.6.10)$$

对于包含非线性因素的原系统, 采用林滋泰德-庞加莱方法作近似计算。为此将方程组(3.6.5)的解 x_1, x_2 展成 ϵ 的幂级数:

$$x_k = x_{k0} + \epsilon x_{k1} + \epsilon^2 x_{k2} + \cdots \quad (k = 1, 2) \quad (3.6.11)$$

其中零次近似解 x_{10}, x_{20} 可根据式(3.6.8)写为

$$x_{10} = A \cos \psi, \quad x_{20} = \phi A \cos \psi \quad (3.6.12)$$

其中 $\phi = \omega t$ 。将原系统的振动频率 ω 也展成 ϵ 的幂级数:

$$\omega^2 = \omega_0^2(1 + \epsilon\sigma_1 + \epsilon^2\sigma_2 + \cdots) \quad (3.6.13)$$

将式(3.6.11), (3.6.12), (3.6.13)代入方程(3.6.5), 将原来对 t 的微分符号改定义为对 ϕ 的微分, 令 ϵ 的同次幂的系数为零, 导出以下各阶近似的线性方程组:

$$\omega_0^2 \ddot{x}_{10} - \lambda_1 \omega_0^2 \ddot{x}_{20} + \omega_{10}^2 x_{10} = 0 \quad (3.6.14a)$$

$$\omega_0^2 \ddot{x}_{20} - \lambda_2 \omega_0^2 \ddot{x}_{10} + \omega_{20}^2 x_{20} = 0 \quad (3.6.14b)$$

$$\omega_0^2 \ddot{x}_{11} - \lambda_1 \omega_0^2 \ddot{x}_{21} + \omega_{10}^2 x_{11} = \omega_0(1 - x_{10}^2) \dot{x}_{10} + \omega_0^2 \sigma_1 (\lambda_1 \ddot{x}_{20} - \ddot{x}_{10}) \quad (3.6.15a)$$

$$\omega_0^2 \ddot{x}_{21} - \lambda_2 \omega_0^2 \ddot{x}_{11} + \omega_{20}^2 x_{21} = -\beta \omega_0 \dot{x}_{20} + \omega_0^2 \sigma_1 (\lambda_2 \ddot{x}_{10} - \ddot{x}_{20}) \quad (3.6.15b)$$

将零次近似解(3.6.12)代入一次近似方程组(3.6.15)的右边, 整理后得到

$$\omega_0^2 \ddot{x}_{11} - \lambda_1 \omega_0^2 \ddot{x}_{21} + \omega_{10}^2 x_{11} = P \cos \phi - R \sin \phi + \frac{1}{3} \omega_0 A^3 \sin 3\phi \quad (3.6.16a)$$

$$\omega_0^2 \ddot{x}_{21} - \lambda_2 \omega_0^2 \ddot{x}_{11} + \omega_{20}^2 x_{21} = Q \cos \phi + S \sin \phi \quad (3.6.16b)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} P &= \omega_0^2 \sigma_1 A (1 - \lambda_1 \phi), & Q &= \omega_0^2 \sigma_1 A (\phi - \lambda_2) \\ R &= -\omega_0 A \left(1 - \frac{A^2}{4}\right), & S &= \beta \omega_0 \phi A \end{aligned} \right\} \quad (3.6.17)$$

为避免此方程组的解中出现久期项以保证运动的周期性, P, Q, R, S 必须满足以下条件:

$$\begin{vmatrix} \omega_{10}^2 - \omega_0^2 & P \\ \lambda_2 \omega_0^2 & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_{20}^2 - \omega_0^2 & R \\ \lambda_1 \omega_0^2 & S \end{vmatrix} = 0 \quad (3.6.18)$$

将式(3.6.17)代入后, 导出以下条件:

$$\sigma_1 A [\lambda_2 \omega_0^2 (1 - \lambda_1 \phi) + (\omega_{10}^2 - \omega_0^2) (\phi - \lambda_2)] = 0 \quad (3.6.19a)$$

$$\lambda_2 \omega_0^2 \left(1 - \frac{A^2}{4}\right) + (\omega_{10}^2 - \omega_0^2) \beta \phi = 0 \quad (3.6.19b)$$

从条件(3.6.19a)解出

$$\sigma_1 = 0 \quad (3.6.20)$$

表明在一次近似意义下,自激振动的频率 ω 等于其派生系统的固有频率 ω_0 。利用式(3.6.10)消去式(3.6.19b)中的 ϕ 后,解出自激振动的振幅:

$$A = 2 \sqrt{1 - \frac{\beta(\omega_{10}^2 - \omega_0^2)}{\omega_{20}^2 - \omega_0^2}} \quad (3.6.21)$$

习 题

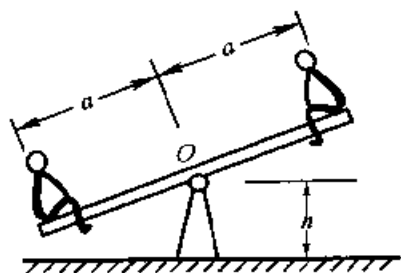
3.1 两个小孩坐在长度为 $2a$, 高度为 h 的跷跷板两端如图示。系统的质心与支点 O 重合, 相对 O 点的转动惯量为 J , 板与地的接触为完全弹性碰撞。

- (1) 若轴承无摩擦, 能否实现周期运动? 是否为自激振动? 画出相轨迹图。
- (2) 若轴承有干摩擦力矩 M , 系统如何运动? 画出相轨迹图。
- (3) 若板接触地时, 小孩用足蹬地, 每次输入不变的能量 ΔE , 在轴承干摩擦和弹性碰撞同时存在的条件下, 求保证系统实现周期运动的 ΔE 值, 是否为自激振动?

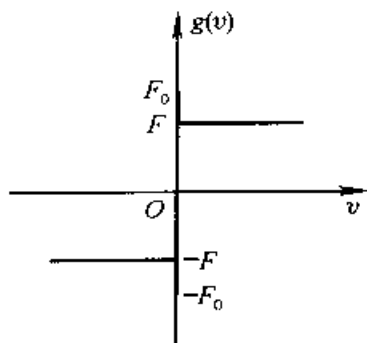
3.2 若图 3.10 所示振动系统中的干摩擦规律简化为

$$\varphi(v) = F \operatorname{sgn} v \quad (v \neq 0), \quad -F_0 \leq \varphi(0) \leq F_0$$

如图示, 其中 $F_0 \geq F$ 。问此系统是否仍可能发生干摩擦自振?



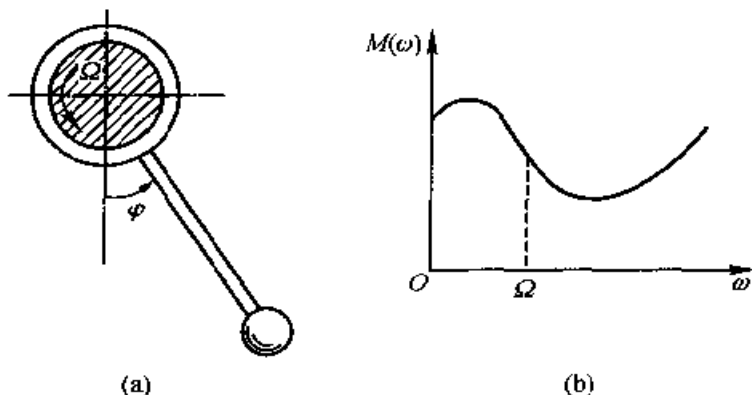
题 3.1 图



题 3.2 图

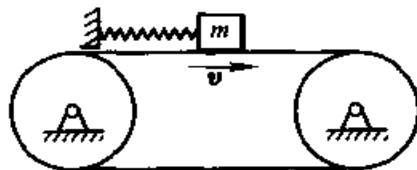
3.3 由质量为 m 的物块与长度为 l 的无自重杆构成的单摆, 在悬挂端用套筒套在以匀角速度 Ω 旋转的轴上如图 a 所示。套筒与轴之间存在非线性干摩擦, 干摩擦力矩 M 取决于两滑动表面之间的相对角速度, 可表示为 $M = M(\omega) = M(\Omega - \dot{\varphi})$, 如图 b 所示。此外摆还存在速度与 $\dot{\varphi}$ 成正比的粘性阻尼力矩, 比例系数为 δ 。设轴的角速度 Ω 与图 b 中曲线 $M(\omega)$ 的拐点相对应。将 $M(\Omega - \dot{\varphi})$ 按 $\dot{\varphi}$ 的幂次展成级数只取 3 次项时, 导出摆的动力学方程。并证明当 $M'(\Omega) < -\delta$ 和 $M''(\Omega) > 0$ 时可化作瑞利方程。

3.4 图示系统中, 物块的质量为 m , 弹簧刚度系数为 k , 传送带速度为 v 。物块与传送带间的静摩擦因数为 f_s , 动摩擦因数为 f , 且 $f_s > f$, 其差值 $f_s - f$ 随速度增大



题 3.3 图

而略有增大。因此,物块向左运动和向右运动时的摩擦因数不同,分别为 f_L 和 f_R 。试求物块在传送带上振动一个周期振幅的增量,进而从能量观点分析稳定周期运动存在的可能性。



题 3.4 图

3.5 试用列纳法画出瑞利方程

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0$$

的相轨迹曲线族。给定其中 $\epsilon = 0.1$ 。

3.6 受冲量激励钟摆的动力学方程为

$$J\ddot{x} + c\dot{x} + kx - \frac{1}{2}I(\dot{x} - |\dot{x}|)\delta(x - x_0) = 0$$

其中 J, c, k, I 和 x_0 均为常数, δ 为狄拉克函数。试求稳态周期运动存在的条件。

3.7 试用谐波平衡法求方程

$$\ddot{x} + x - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + \epsilon x^3 = 0 \quad (\epsilon \ll 1)$$

的近似周期解的频率和幅值。

3.8 试用林滋泰德-庞加莱法、多尺度法和平均法计算上题的一次近似解。

3.9 试用谐波平衡法求方程

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^4)\dot{x} + x = 0 \quad (\epsilon \ll 1)$$

的近似周期解的频率和幅值。

3.10 试用林滋泰德-庞加莱法、多尺度法和平均法计算上题的一次近似解。

第四章 参数振动

参数振动是除自由振动、受迫振动和自激振动以外的又一种振动形式,产生参数振动的系统称为**参变系统**。参数振动由外界的激励产生,但激励不是以外力形式施加于系统,而是通过系统内参数的周期性改变间接地实现。由于参数的时变性,参数振动系统为非自治系统。系统在参数激励下所产生的响应有时可能很微弱,但也可能出现剧烈的共振现象,这取决于参数振动系统的稳定性。描述参数振动的数学模型为周期变系数的常微分方程,因此对参数振动的研究归结于对变系数常微分方程组零解稳定性的研究。本章首先叙述参数振动的普遍性质,以及工程中的一些典型的参数振动问题。着重讨论单自由度线性系统的参数振动,利用弗洛凯(G. Floquet)理论判断参数振动的稳定性,对方波和简谐形式的参数激励作出稳定图。此外,本章也介绍多自由度系统的组合参数振动,并举例说明非线性参数振动的特点。

§ 4.1 参数振动概述

4.1.1 参数振动的产生

1831 年法拉地(M. Faraday)最早发现参数振动现象,他观测到充液容器作铅垂振动时,液体的自由表面波动周期为容器振动周期的 2 倍。1859 年麦尔德(F. Melde)将弦张紧于固定端和音叉之间,当音叉振动频率接近于弦横向振动频率的 2 倍时,可观察到弦的剧烈振动。这种由于参数周期变化引起的振动在工程中也普遍存在。以下以变长度摆为例说明参数振动产生的原因。

以变长度摆的参数振动为例。设单摆用手控制,使摆长随时间周期性变化(图 4.1)。变化的规律为:在绳的拉力最小的 A 和 B 处放长,在拉力最大的 C 处收缩(图 4.2)。则输入的正功必大于负功。设摆的最大长度为 l ,振幅为 x ,净输入能量与摆的最大垂直位移 $l(1 - \cos x)$ 成正比。轴承内存在干摩擦时,耗散能量与最大偏角 x 成正比。图 4.3 中输

入能量与耗散能量曲线的交点对应于周期运动,但此周期运动为不稳定状态。初始偏角小于周期运动振幅时,振动趋于衰减。初始偏角大于周期运动振幅时,则振幅不断增大而出现参数共振。因此,周期运动是不稳定运动与渐近稳定运动的分界线。此现象可以从荡秋千的实践中得到证实。

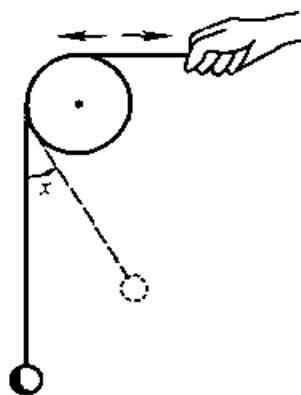


图 4.1 变长度摆

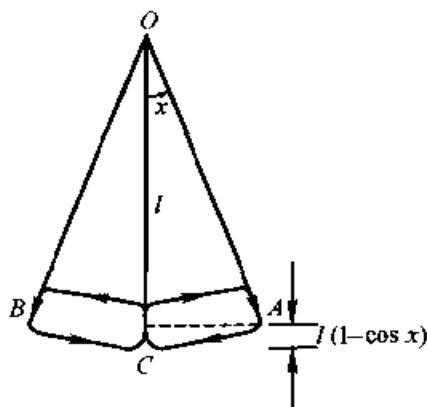


图 4.2 变长度摆的运动轨迹

支点上下振动的单摆是与变长度单摆类似的参变系统(图 4.4)。当支座对摆所做的正功大于负功时,输入和耗散的能量关系曲线与图 4.3 相同。摆的平衡位置可能稳定,也可能出现参数共振。

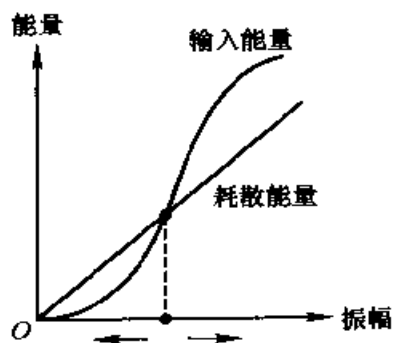


图 4.3 变长度摆的输入能与耗散能

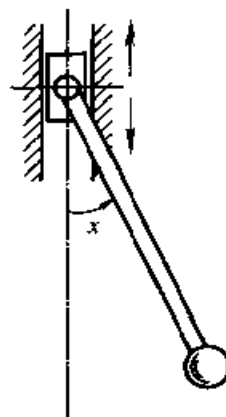


图 4.4 支点振动的单摆

4.1.2 参数振动的特征

1. 参数振动过程中存在能量的输入与耗散,因此参变系统为非保守系统。

2. 激励对系统的作用通过系统内参数的周期改变实现,因此参变系统为非自治系统,其数学模型为周期变系数的线性常微分方程,一般形式为

$$\alpha(t)\ddot{y} + \beta(t)\dot{y} + \gamma(t)y = 0 \quad (4.1.1)$$

其中 α, β 和 γ 为周期 T 的周期函数。利用坐标变换

$$y = xe^{-\frac{1}{2}\int\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}dt} \quad (4.1.2)$$

可将(4.1.1)化为典型形式:

$$\ddot{x} + q(t)x = 0 \quad (4.1.3)$$

其中

$$q(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)} - \frac{1}{4} \frac{\beta^2(t)}{\alpha^2(t)} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \right] \quad (4.1.4)$$

为周期 T 的周期函数,方程(4.1.3)称为希尔(G. W. Hill)方程,是1877年希尔在研究月球运动时建立的。作为特殊情形,若 $q(t)$ 简谐变化且为偶函数,则称为马蒂厄(E. Mathieu)方程,

$$\ddot{x} + (\delta + \epsilon \cos \omega t)x = 0 \quad (4.1.5)$$

为马蒂厄1868年研究椭圆薄膜振动时建立的。

3. 参数振动的稳定性取决于能量的输入与耗散的相互关系。若同一周期内输入能量超过耗散能量,则振幅不断增大。若输入能量低于耗散能量,则振幅趋于衰减。周期运动是不稳定运动与渐近稳定运动之间的临界情况。

§ 4.2 工程中的参数振动

4.2.1 受轴向周期力激励的直杆

设两端铰支、长度为 l 、横截面面积为 S 、单位长度质量为 ρ_l 、抗弯刚度为 EI 的直杆在两端受到轴向周期力 $F \cos \omega t$ 的作用(图4.5),其横向振动的动力学方程为

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho_l S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + F \cos \omega t \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (4.2.1)$$

假定振型为正弦曲线,令

$$y = s(t) \sin \frac{\pi x}{l} \quad (4.2.2)$$

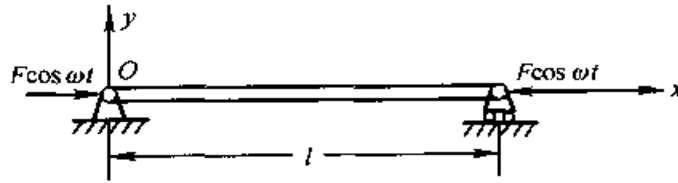


图 4.5 受轴向周期激励力的直杆

代入方程(4.2.1)分离变量后,简化为单自由度系统的动力学方程,即马蒂厄方程

$$\ddot{s} + (\delta + \epsilon \cos \omega t)s = 0 \quad (4.2.3)$$

其中

$$\delta = \frac{\pi^4 EI}{\rho_l S l^4}, \quad \epsilon = -\frac{\pi^2 F}{\rho_l S l^2} \quad (4.2.4)$$

4.2.2 非圆截面轴的横向振动

设以 ω 角速度高速旋转的轴受约束只能沿一个方向作横向振动,转轴的截面由于挖去键槽或嵌线槽,而偏高圆形(图 4.6),其相对定坐标轴的截面二次矩 I 为转角 $\varphi = \omega t$ 的简谐函数:

$$I = I_0 + \Delta I \cos \varphi \quad (4.2.5)$$

轴的横向振动方程为

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho_l S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (4.2.6)$$

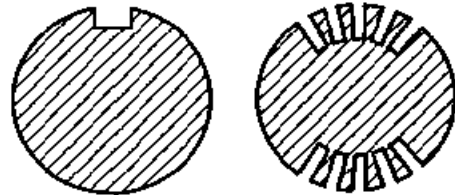


图 4.6 轴的非圆截面

将假定振型(4.2.2)和式(4.2.5)代入方程(4.2.6),亦化为马蒂厄方程(4.2.3),其中

$$\delta = \frac{\pi^4 EI_0}{\rho_l S l^4}, \quad \epsilon = -\frac{\pi^4 E \Delta I}{\rho_l S l^4} \quad (4.2.7)$$

4.2.3 电动机车传动轴的扭振

设电动机车的驱动轮由两根连杆与电机的传动轴相连。连杆与轮的联结偏置 90° 以消除死点现象(图 4.7)。讨论电机传动轴的扭转振动时,必须考虑不同连杆位置引起轴的抗扭刚度的改变。连杆处于 $\varphi = \pi/2$ 的死点位置时,传动轴的微小转动不受阻碍,其抗扭刚度为零。连杆处于与

死点垂直的 $\varphi = 0$ 位置时,传动轴的转动受车轮的阻止,其抗扭刚度达到最大值。图 4.8 给出各连杆单独引起的抗扭刚度和二连杆抗扭刚度的总和,后者为车轮转角 φ 的简谐函数,记为

$$K(\varphi) = K_0 + \Delta K \cos \varphi \quad (4.2.8)$$

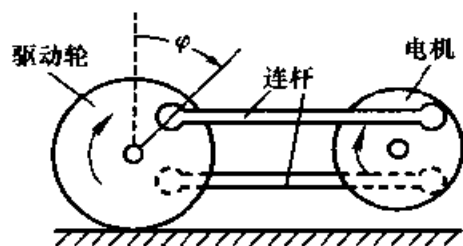


图 4.7 电动机车的传动

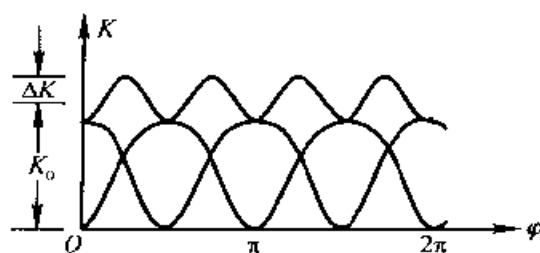


图 4.8 传动轴抗扭刚度的变化曲线

设传动轴的扭角为 x , 转动惯量为 J , 车轮角速度为 ω , 令 $\varphi = \omega t$, 列出传动轴的扭转振动的动力学方程为

$$J\ddot{x} + (K_0 + \Delta K \cos \varphi)x = 0 \quad (4.2.9)$$

也可化为马蒂厄方程(4.1.5), 其中

$$\delta = \frac{K_0}{J}, \quad \epsilon = \frac{\Delta K}{J} \quad (4.2.10)$$

4.2.4 人造卫星的姿态运动

讨论沿椭圆轨道运行的人造卫星。卫星 O 与地球 O_e 的质心距离 r 的变化规律为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (4.2.11)$$

其中常数 p 和 e 分别为轨道的半轴参数和偏心率, θ 为以近地点 H 为基准的真近点角(图 4.9)。设 μ 为地球的引力常数, 轨道运动的角速度 ω 为

$$\omega = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (1 + e \cos \theta)^2 \quad (4.2.12)$$

设卫星的主轴坐标系($Oxyz$)中 z 轴沿轨道平面法线 Z , x, y 轴相对轨道坐标轴 X, Y 的偏角为 φ (图 4.10), 则卫星在重力梯度力矩作用下的平面运动动力学方程为

$$C\ddot{\varphi} + \frac{3\mu}{2r^3}(B - A)\sin 2\varphi = 0 \quad (4.2.13)$$

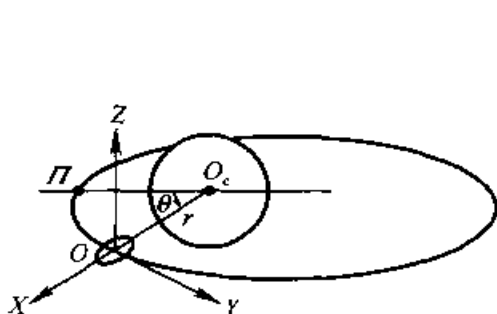


图 4.9 椭圆轨道上的人造卫星

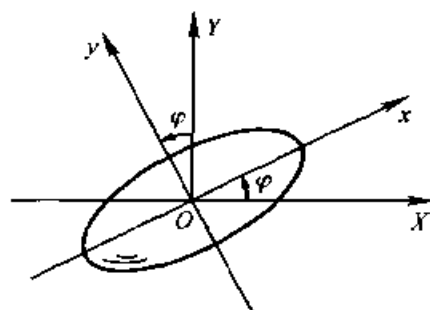


图 4.10 人造卫星的姿态运动

其中 A, B, C 为卫星的主转动惯量。对于小偏角和小偏心率情形, 将式 (4.2.11) 代入式 (4.2.13), 只保留 φ 和 e 的一次项, 化为马蒂厄方程

$$\ddot{\varphi} + (\delta + \varepsilon \cos \omega t) \varphi = 0 \quad (4.2.14)$$

其中

$$\delta = \frac{3\mu(B-A)}{Cp^3}, \quad \varepsilon = \frac{9\mu e(A-B)}{Cp^3}, \quad \omega \approx \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \quad (4.2.15)$$

§ 4.3 弗洛凯理论

4.3.1 基本解

弗洛凯理论是分析周期变系数线性常微分方程的解的稳定性理论, 由弗洛凯(G. Floquet)于 1868 年提出。弗洛凯理论适用于 n 阶方程, 本书只讨论二阶方程, 其一般形式为

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \quad (4.3.1)$$

其中 $p(t)$ 和 $q(t)$ 都是周期为 T 的周期函数, 满足

$$p(t+T) = p(t), \quad q(t+T) = q(t) \quad (4.3.2)$$

设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 为方程 (4.3.1) 的两个线性独立的特解, 满足朗斯基 (H. J. M. Wronsky) 判别式 $\Delta(t)$ 不为零的条件,

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \dot{x}_1(t) \\ x_2(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4.3.3)$$

$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 构成方程 (4.3.1) 的基本解。方程 (4.3.1) 的任何解都可用基本解的线性组合表示,

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) \quad (4.3.4)$$

以下证明满足初始条件

$$\begin{pmatrix} x_1(0) & \dot{x}_1(0) \\ x_2(0) & \dot{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3.5)$$

的解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 为方程(4.3.1)的基本解。

将式(4.3.3)对 t 微分,利用方程(4.3.1)导出

$$\frac{d\Delta}{dt} = \begin{vmatrix} x_1 & \ddot{x}_1 \\ x_2 & \ddot{x}_2 \end{vmatrix} = -p\Delta \quad (4.3.6)$$

从上式积分得到

$$\Delta(t) = \Delta(0)e^{-\int_0^t p(\tau)d\tau} \quad (4.3.7)$$

由于 $\Delta(0)=1 \neq 0$, 则 $\Delta(t) \neq 0$, $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 为基本解, 证毕。

若 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 为基本解, 由于 $x_1(t+T)$ 和 $x_2(t+T)$ 也是方程(4.3.1)的解, 可以表示为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的线性组合:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t+T) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ x_2(t+T) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.8)$$

写为矩阵形式

$$x(t+T) = Ax(t) \quad (4.3.9)$$

其中 $x = (x_1, x_2)^T$, $A = (a_{ij})$ 。将初始条件(4.3.5)代入式(4.3.8), 导出

$$A = \begin{pmatrix} x_1(T) & \dot{x}_1(T) \\ x_2(T) & \dot{x}_2(T) \end{pmatrix} \quad (4.3.10)$$

4.3.2 正规解

在常系数常微分方程中, 以指数函数 $x = e^{\lambda t}$ 作为基本解。它具有以下性质:

$$x(t+T) = \sigma x(t) \quad (4.3.11)$$

其中 $\sigma = e^{\lambda T}$ 为复常数。零解的稳定性由 λ 的实部符号判断: $\text{Re } \lambda < 0$ 为渐近稳定, $\text{Re } \lambda > 0$ 为不稳定, $\text{Re } \lambda = 0$ 为临界情况。

在周期变系数微分方程中, 虽然找不到指数函数特解, 但仍有可能找出满足与(4.3.11)相同条件的特解, 其中 σ 也是某个复常数。这种特殊性质的特解称为正规解。找到正规解以后可利用条件(4.3.11)判断经过任意周期以后解的变化趋势。反复使用条件(4.3.11) m 次, 得到

$$x(t + mT) = \sigma^m x(t) \quad (4.3.12)$$

因此根据 σ 的模可以判断解是否有界,并依此判断零解的稳定性:

$$|\sigma| < 1: \text{稳定} \quad |\sigma| > 1: \text{不稳定} \quad |\sigma| = 1: \text{临界情况} \quad (4.3.13)$$

若 σ 为实数,则临界情况 $\sigma = \pm 1$ 对应于周期解。 $\sigma = +1$ 时周期为 T ,
 $\sigma = -1$ 时,周期为 $2T$ 。

将正规解 $x(t)$ 表示为基本解 x_1 和 x_2 的线性组合:

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \quad (4.3.14)$$

将式(4.3.8)和(4.3.14)代入式(4.3.11),整理后得到

$$[\alpha_1(a_{11} - \sigma) + \alpha_2 a_{21}]x_1 + [\alpha_1 a_{12} + \alpha_2(a_{22} - \sigma)]x_2 = 0 \quad (4.3.15)$$

由于 x_1 和 x_2 线性独立,其系数必为零,得到

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(a_{11} - \sigma) + \alpha_2 a_{21} &= 0 \\ \alpha_1 a_{12} + \alpha_2(a_{22} - \sigma) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3.16)$$

设 $A = (a_{ij})$ 为方程(4.3.16)的系数矩阵,从 α_1 和 α_2 的非零解条件导出 σ 的本征方程:

$$|A - \sigma E| = \sigma^2 + P\sigma + Q = 0 \quad (4.3.17)$$

系数 P 和 Q 分别为

$$P = -\operatorname{tr} A, \quad Q = \det A = \Delta(T) \quad (4.3.18)$$

本征方程(4.3.17)与基本解的选择无关。要证明这点,只需选择另一对基本解 y_1 和 y_2

$$y_1 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \quad y_2 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \quad (4.3.19)$$

将 y_1 和 y_2 代替 x_1 和 x_2 ,重复以上运算可导出与(4.3.17)相同的本征方程。因此,当微分方程的参数确定以后,本征方程以及所对应的本征根都惟一地被确定。因 $Q \neq 0$,本征方程(4.3.17)无零根。根据条件(4.3.13),若全部本征值的模 $|\sigma|$ 均小于 1,则零解渐近稳定;只要其中有一个本征值的模 $|\sigma|$ 大于 1,零解必不稳定。

4.3.3 希尔方程的正规解

设方程(4.3.1)中 $p(t) \equiv 0$, $q(t)$ 为周期为 T 的周期函数,即成为希尔方程

$$\ddot{x} + q(t)x = 0 \quad (4.3.20)$$

根据初始条件(4.3.5)导出基本解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 代入式(4.3.10)得到矩阵 A 。由于 $p(t) \equiv 0$, 从式(4.3.7)导出 $\Delta(t) = \Delta(0) = 1$, 则 $Q = 1$, 本征方程为

$$\sigma^2 - 2a\sigma + 1 = 0 \quad (4.3.21)$$

其中 $2a = a_{11} + a_{22}$ 。可解出本征值:

$$\sigma_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1} \quad (4.3.22)$$

分以下几种情形讨论:

(1) $|a| > 1$: σ_1 和 σ_2 中必有一个根的值大于 1, 对应的基本解无界, 零解不稳定。

(2) $|a| < 1$: σ_1 和 σ_2 为共轭复根, 由于 $\sigma_1 \sigma_2 = 1$, 此共轭复根的模必等于 1, 方程的基本解有界, 零解稳定。

(3) $|a| = 1$: $\sigma_1 = \sigma_2 = \pm 1$ 为重根, 其中一个正规解是以 T 或 $2T$ 为周期的周期解, 是稳定与不稳定之间的临界情形。

因此选择方程的参数组合使系统实现周期为 T 或 $2T$ 的周期运动, 即可在参数平面内作出稳定与不稳定区域的分界线。

§ 4.4 稳 定 图

4.4.1 方波激励的参数振动

参数平面内稳定与不稳定区域的分界线称为参数振动的稳定图。方波参数激励的稳定图可利用线性激励方程的解直接导出。设希尔方程中参数 $q(t)$ 按以下周期为 T 的方波规律周期变化(图 4.11):

$$q(t) = \begin{cases} \delta + \varepsilon & \left(0 < t < \frac{T}{2}\right) \\ \delta & \left(\frac{T}{2} < t < T\right) \end{cases} \quad (4.4.1)$$

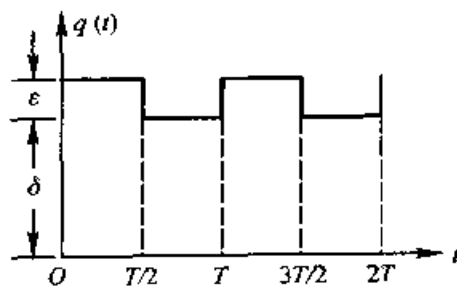


图 4.11 方波参数激励

此参变系统在不同的半周期内可用不同的常系数线性微分方程表示, 写为

$$\ddot{x}_1 + (\delta + \epsilon)x_1 = 0 \quad \left(0 < t < \frac{T}{2}\right) \quad (4.4.2a)$$

$$\ddot{x}_2 + \delta x_2 = 0 \quad \left(\frac{T}{2} < t < T\right) \quad (4.4.2b)$$

方程(4.4.2a)和(4.4.2b)的通解分别为

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \sin \omega_{10} t + D_1 \cos \omega_{10} t \\ x_2 = C_2 \sin \omega_{20} t + D_2 \cos \omega_{20} t \end{cases} \quad (4.4.3)$$

其中参数 ω_{10} 和 ω_{20} 分别定义为

$$\omega_{10} = \sqrt{\delta + \epsilon}, \quad \omega_{20} = \sqrt{\delta} \quad (4.4.4)$$

积分常数 C_1, D_1, C_2 和 D_2 由解的连续性及其正规解条件(4.3.11)确定,

$$\left. \begin{aligned} x_1\left(\frac{T}{2}\right) &= x_2\left(\frac{T}{2}\right), & \dot{x}_1\left(\frac{T}{2}\right) &= \dot{x}_2\left(\frac{T}{2}\right) \\ x_2(T) &= \sigma x_1(0), & \dot{x}_2(T) &= \sigma \dot{x}_1(0) \end{aligned} \right\} \quad (4.4.5)$$

将式(4.4.3)代入后,导出

$$\left. \begin{aligned} C_1 \sin \frac{\omega_{10} T}{2} + D_1 \cos \frac{\omega_{10} T}{2} - C_2 \sin \frac{\omega_{20} T}{2} - D_2 \cos \frac{\omega_{20} T}{2} &= 0 \\ \omega_{10} \left(C_1 \cos \frac{\omega_{10} T}{2} - D_1 \sin \frac{\omega_{10} T}{2} \right) - \omega_{20} \left(C_2 \cos \frac{\omega_{20} T}{2} - D_2 \sin \frac{\omega_{20} T}{2} \right) &= 0 \\ \sigma D_1 - C_2 \sin \omega_{20} T - D_2 \cos \omega_{20} T &= 0 \\ \sigma \omega_{10} C_1 - \omega_{20} (C_2 \cos \omega_{20} T - D_2 \sin \omega_{20} T) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4.6)$$

从 C_1, D_1, C_2 和 D_2 的非零解条件导出 σ 应满足的本征方程:

$$\begin{vmatrix} \sin \frac{\omega_{10} T}{2} & \cos \frac{\omega_{10} T}{2} & -\sin \frac{\omega_{20} T}{2} & -\cos \frac{\omega_{20} T}{2} \\ \omega_{10} \cos \frac{\omega_{10} T}{2} & -\omega_{10} \sin \frac{\omega_{10} T}{2} & -\omega_{20} \cos \frac{\omega_{20} T}{2} & \omega_{20} \sin \frac{\omega_{20} T}{2} \\ 0 & \sigma & -\sin \omega_{20} T & -\cos \omega_{20} T \\ \sigma \omega_{10} & 0 & -\omega_{20} \cos \omega_{20} T & \omega_{20} \sin \omega_{20} T \end{vmatrix} = \sigma^2 - 2a\sigma + 1 = 0 \quad (4.4.7)$$

此本征方程与式(4.3.21)相同,其中

$$a = \cos \frac{\omega_{10} T}{2} \cos \frac{\omega_{20} T}{2} - \left(\frac{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2}{2\omega_{10}\omega_{20}} \right) \sin \frac{\omega_{10} T}{2} \sin \frac{\omega_{20} T}{2} \quad (4.4.8)$$

从本征方程(4.4.7)解出形式与(4.3.22)相同的本征值:

$$\sigma_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1} \quad (4.4.9)$$

根据上节的分析,零解的稳定性取决于 $|a| > 1$ 或 $|a| < 1$, $|a| = 1$ 为稳定与不稳定之间的临界情形。对于 $\epsilon = 0$ 的特殊情形,系统(4.4.2)派生为固有频率为 $\omega_0 = \sqrt{\delta}$ 的线性保守系统,式(4.4.8)简化为

$$a = \cos^2 \frac{\omega_0 T}{2} - \sin^2 \frac{\omega_0 T}{2} = \cos \frac{2\pi T}{T_0} \quad (4.4.10)$$

其中 $T_0 = 2\pi/\sqrt{\delta}$ 为派生系统的自由振动周期。因此与临界情形对应的 $|a| = 1$ 条件转化为

$$\frac{2T}{T_0} = n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.4.11)$$

利用式(4.4.8),(4.4.4)可直接在 (δ, ϵ) 参数平面上画出稳定区域的边界曲线族。令 $T = \pi$,此稳定图如图4.12所示。各曲线与横坐标轴的一系列交点均对应于派生线性系统的自由振动。从式(4.4.11)导出,此交点为 $\delta = n^2 (n = 0, 1, 2, \dots)$ 。由于 $\epsilon = 0, \delta < 0$ 为支点固定的倒摆,其零解必不稳定。1919年霍普特(O. Haupt)的研究表明,^[2]稳定域与不稳定域依次交替分布,因此根据 $\epsilon = 0, \delta < 0$ 的不稳定域可以推断出其他不稳定域,即图4.12中的阴影线区域。可以看出,在曲线族与横坐标轴交点 $\delta = n^2 (n = 0, 1, 2, \dots)$ 处,只要 ϵ 稍稍偏离零值,就可能出现不稳定而导致参数共振。也可从式(4.4.11)推论:当参数激励的周期 T 等于派生系统的自由振动周期 T_0 的 $n/2 (n = 1, 2, \dots)$ 时,就可能产生参数共振。

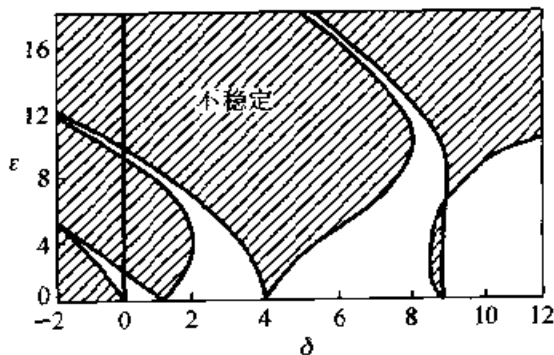


图 4.12 方波激励的稳定图

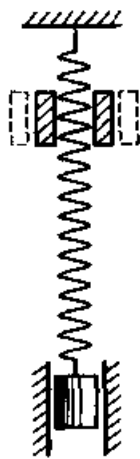


图 4.13 变刚度弹簧—质量系统

例 4.4-1 图 4.13 所示质量为 m , 弹簧刚度系数为 k 的质量-弹簧系统在近固定端可受到轴套的抱紧而改变弹簧刚度。抱紧和释放以 $T/2$ 的持续时间交替进行。求可引起参数共振的 T 的最小值。

解: 未受轴套抱紧的线性系统的自由振动周期为 $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ 。可引起参数共振的 T 的最小值 T_{\min} 为 T_0 的 $1/2$, 即

$$T_{\min} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

4.4.2 简谐激励的参数振动

讨论用马蒂厄方程表示的简谐激励的参数振动, 其稳定域的边界曲线必须利用近似解析方法导出渐近表达式。设激励周期 $T = \pi$, 即 $\omega = 2$ 。马蒂厄方程写为

$$\ddot{x} + (\delta + \varepsilon \cos 2t)x = 0 \quad (4.4.12)$$

$\varepsilon = 0$ 时, 为保证线性保守系统有周期等于 π 或 2π 的周期解, 必须令 $\delta = n^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 分别对应于线性无关的特解 $\sin nt$ 和 $\cos nt$ 。除 $n = 0$ 时的周期解为常值解以外, n 为偶数时周期为 π , n 为奇数时周期为 2π 。

利用林滋泰德-庞加莱摄动方法, 将方程(4.4.12)的解 $x(t)$ 和参数 δ 都展成 ε 的幂级数

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (4.4.13)$$

$$\delta = n^2 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 + \dots \quad (4.4.14)$$

代入方程(4.4.12), 令两边 ε 的同次幂系数相等, 导出各阶近似的线性方程组:

$$\ddot{x}_0 + n^2 x_0 = 0 \quad (4.4.15a)$$

$$\ddot{x}_1 + n^2 x_1 = -(\sigma_1 + \cos 2t)x_0 \quad (4.4.15b)$$

$$\ddot{x}_2 + n^2 x_2 = -(\sigma_1 + \cos 2t)x_1 - \sigma_2 x_0 \quad (4.4.15c)$$

.....

分别讨论 n 的不同值:

(1) $n = 0$

从方程(4.4.15a)解出

$$\ddot{x}_0 = 0 \quad (4.4.16)$$

x_0 的周期解唯有常值解。令 $x_0 = 1$, 代入方程(4.4.15b)后, 得到

$$\ddot{x}_1 = -(\sigma_1 + \cos 2t) \quad (4.4.17)$$

为避免 x_1 的解中出现久期项, 必须令 $\sigma_1 = 0$ 。积分得到周期解:

$$x_1 = \frac{1}{4} \cos 2t \quad (4.4.18)$$

代入方程(4.4.15c), 得到

$$\ddot{x}_2 = -\left(\sigma_2 + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8} \cos 4t \quad (4.4.19)$$

周期解条件要求 $\sigma_2 = -1/8$, 积分得到

$$x_2 = \frac{1}{128} \cos 4t \quad (4.4.20)$$

如此继续计算, 最后得到

$$x = ce_0(t, \epsilon) = 1 + \frac{\epsilon}{4} \cos 2t + \frac{\epsilon^2}{128} \cos 4t + \dots \quad (4.4.21)$$

$$\delta = \alpha_{c0}(\epsilon) = -\frac{1}{8} \epsilon^2 + \dots \quad (4.4.22)$$

(2) $n=1$

方程(4.4.15a)有两个线性无关的特解 $\cos t$ 和 $\sin t$ 。先采用 $x_0 = \cos t$, 代入方程(4.4.15b)后得到

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\left(\sigma_1 + \frac{1}{2}\right) \cos t - \frac{1}{2} \cos 3t \quad (4.4.23)$$

为避免久期项, 令 $\sigma_1 = -1/2$, 积分得到

$$x_1 = \frac{1}{16} \cos 3t \quad (4.4.24)$$

代入方程(4.4.15c), 得到

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -\left(\sigma_2 + \frac{1}{32}\right) \cos t + \frac{1}{32} \cos 3t - \frac{1}{32} \cos 5t \quad (4.4.25)$$

周期解条件要求 $\sigma_2 = -1/32$, 积分得到

$$x_2 = -\frac{1}{256} \cos 3t + \frac{1}{768} \cos 5t \quad (4.4.26)$$

继续计算后得到

$$x = ce_1(t, \epsilon) = \cos t + \frac{\epsilon}{16} \cos 3t + \frac{\epsilon^2}{768} (-3 \cos 3t + \cos 5t) + \dots \quad (4.4.27)$$

$$\delta = \alpha_{c1}(\epsilon) = 1 - \frac{1}{2} \epsilon - \frac{1}{32} \epsilon^2 + \dots \quad (4.4.28)$$

若改用 $x_0 = \sin t$ 计算, 则得到

$$x = se_1(t, \epsilon) = \sin t + \frac{\epsilon}{16} \sin 3t + \frac{\epsilon^2}{768} (3 \sin 3t + \sin 5t) + \dots \quad (4.4.29)$$

$$\delta = \alpha_{s1}(\epsilon) = 1 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{32}\epsilon^2 + \dots \quad (4.4.30)$$

(3) $n=2$

方程(4.4.15a)线性无关的特解为 $\cos 2t$ 和 $\sin 2t$ 。先将 $x_0 = \cos 2t$ 代入方程(4.4.15b), 得到

$$\ddot{x}_1 + 4x_1 = -\sigma_1 \cos 2t - \frac{1}{2}(1 + \cos 4t) \quad (4.4.31)$$

为避免久期项, 令 $\sigma_1 = 0$, 导出

$$x_1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{24} \cos 4t \quad (4.4.32)$$

代入方程(4.4.15c)得到

$$\ddot{x}_2 + 4x_2 = -\left(\sigma_2 - \frac{5}{48}\right) \cos 2t + \frac{1}{48} \cos 6t \quad (4.4.33)$$

周期解条件要求 $\sigma_2 = 5/48$, 积分得到

$$x_2 = \frac{1}{1536} \cos 6t \quad (4.4.34)$$

继续计算后得到

$$x = ce_2(t, \epsilon) = \cos 2t + \frac{\epsilon}{24} (3 - \cos 4t) + \frac{\epsilon^2}{1536} \cos 6t + \dots \quad (4.4.35)$$

$$\delta = \alpha_{c2}(\epsilon) = 4 + \frac{5}{48}\epsilon^2 + \dots \quad (4.4.36)$$

若改用 $x_0 = \sin 2t$ 计算, 则导出

$$x = se_2(t, \epsilon) = \sin 2t + \frac{\epsilon}{24} \sin 4t + \frac{\epsilon^2}{1536} \sin 6t + \dots \quad (4.4.37)$$

$$\delta = \alpha_{s2}(\epsilon) = 4 - \frac{1}{48}\epsilon^2 + \dots \quad (4.4.38)$$

如此继续计算直到满足精度要求时为止。计算得到用级数表示的函数 $ce_n(t, \epsilon)$ 和 $\alpha_{cn}(\epsilon)$ ($n=0, 1, 2, \dots$), 称为 n 阶余弦型马蒂厄函数及其特征函数, $se_n(t, \epsilon)$ 和 $\alpha_{sn}(\epsilon)$ ($n=1, 2, \dots$) 称为 n 阶正弦型马蒂厄函数

及其特征函数。

特征函数曲线 $\alpha_{cn}(\epsilon)$ ($n=0,1,2,\dots$) 和 $\alpha_{sn}(\epsilon)$ ($n=1,2,\dots$) 为 (δ, ϵ) 参数平面内稳定区和不稳定区的分界线。 $\epsilon < 0$ 部分就是 $\epsilon > 0$ 的图形相对横坐标轴的镜像。图中的不稳定区域也利用与图 4.12 类似的方法确定, 在图 4.14 中用阴影线表示。与方波激励情形相同, 稳定域的边界曲线族也是在 $\delta = n^2$ ($n=0,1,2,\dots$) 处与横坐标轴相交, 交点处对应的线性系统即使受到微弱的参数激励也可能产生剧烈的参数共振。还值得注意的是, 即使对于 $\delta < 0$ 的不稳定倒摆, 当支点上下振动时, 不论方波激励或简谐激励, 都有可能选择适当的频率和振幅使倒摆的运动转为稳定。

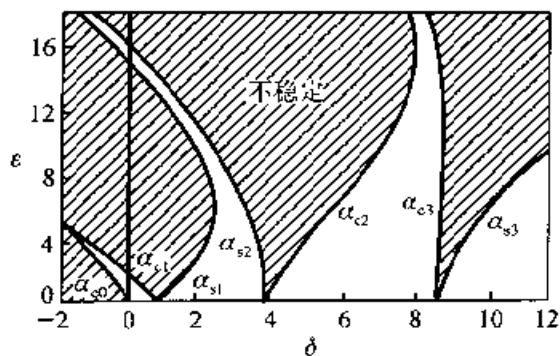


图 4.14 简谐激励的稳定图

例 4.4-2 试利用平均法对简谐参数激励的稳定图作近似计算。

解: 以马蒂厄方程为讨论对象:

$$\ddot{x} + (\delta + \epsilon \cos 2t)x = 0 \quad (a)$$

根据弗洛凯理论, 当参数 δ 和 ϵ 满足一定关系时, 方程(a)可存在周期为 π 或 2π 的周期运动。设此周期解的一般形式为

$$x = a \cos nt + b \sin nt \quad (b)$$

$$\dot{x} = -a n \sin nt + b n \cos nt \quad (c)$$

其中 $n=1,2$, a 和 b 均为时间 t 的慢变函数, 应满足

$$\dot{a} \cos nt + \dot{b} \sin nt = 0 \quad (d)$$

将式(c)对 t 求导, 代入方程(a), 得到

$$-\dot{a} \sin nt + \dot{b} \cos nt = \frac{x}{n} (n^2 - \delta - \epsilon \cos 2t) \quad (e)$$

从式(d),(e)导出 a 和 b 的微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{1}{n}(n^2 - \delta - \epsilon \cos 2t)(a \cos nt + b \sin nt) \sin nt \\ \dot{b} &= \frac{1}{n}(n^2 - \delta - \epsilon \cos 2t)(a \cos nt + b \sin nt) \cos nt \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

将此方程组的右项以 π 或 2π 周期内的平均值代替, 就得到平均化方程。先讨论 $n=1$ 的情形, 导出

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -\left(\frac{1-\delta}{2} + \frac{\epsilon}{4}\right)b \\ \dot{b} &= \left(\frac{1-\delta}{2} - \frac{\epsilon}{4}\right)a \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

其本征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & \frac{1-\delta}{2} + \frac{\epsilon}{4} \\ -\frac{1-\delta}{2} + \frac{\epsilon}{4} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \left[\left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2 - \left(\frac{1-\delta}{2}\right)^2\right] = 0 \quad (h)$$

解出本征值为

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2 - \left(\frac{1-\delta}{2}\right)^2} \quad (i)$$

a 和 b 的零解稳定性条件即 λ 的纯虚根条件:

$$\left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2 - \left(\frac{1-\delta}{2}\right)^2 < 0 \quad (j)$$

即

$$\left. \begin{aligned} \delta &< 1 - \frac{\epsilon}{2} \quad (\delta < 1) \\ \delta &> 1 + \frac{\epsilon}{2} \quad (\delta > 1) \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

对于 $n=2$ 情形, 方程(f)的平均化方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -\left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right)b \\ \dot{b} &= \left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right)a \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

其本征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 - \frac{\epsilon}{4} \\ -\left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right) & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right)^2 = 0 \quad (m)$$

本征值为

$$\lambda = \pm \left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right)i \quad (n)$$

表明 $n=2$ 时 a 和 b 的零解恒稳定。图 4.15 为近似的稳定图,其边界曲线为图 4.14 中的曲线与横坐标轴交点处的切线,因此只能近似地适用于 ϵ 足够小的情况。

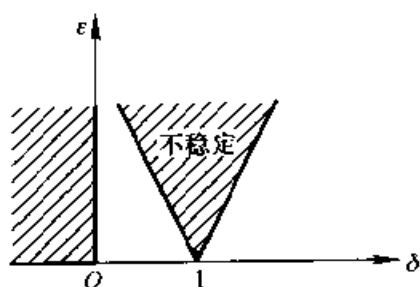


图 4.15 近似的简谐激励稳定图

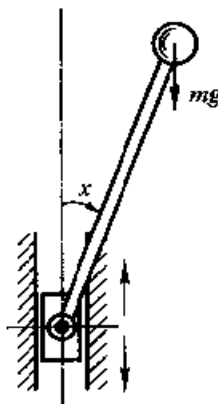


图 4.16 基座振动的倒置单摆

例 4.4-3 设图 4.16 所示的倒置单摆的摆长为 $l=0.5\text{ m}$, 支承点按规律 $y_0 = A_0 \sin \omega t$ 振动, 振幅为 $A_0 = 10\text{ mm}$ 。求为保证单摆的倒置状态稳定, 激励频率 ω 应满足的条件。

解: 设单摆在倒置状态附近的微小偏角为 x , 列出单摆的微幅振动方程:

$$\ddot{x} + \frac{1}{l}(-g + A_0 \omega^2 \cos \omega t)x = 0 \quad (a)$$

引入新变量 $\psi = \omega t$ 代替时间变量 t , 方程(a)可写为

$$\left(\frac{\omega^2}{4}\right) \frac{d^2 x}{d\psi^2} + \frac{1}{l}(-g + A_0 \omega^2 \cos 2\psi)x = 0 \quad (b)$$

在不会引起混淆的情况下, 仍以符号 t 代替 ψ , 将方程(b)化为

$$\ddot{x} + (\delta + \epsilon \cos 2t)x = 0 \quad (c)$$

其中

$$\delta = -\frac{4g}{l\omega^2}, \quad \epsilon = \frac{4A_0}{l} \quad (d)$$

观察图 4.13 中 $\delta < 0$ 部分的稳定图, 可写出以下稳定性条件:

$$\alpha_{cl}(\varepsilon) > \delta > \alpha_{c0}(\varepsilon) \quad (e)$$

将式(d)和式(4.4.20), (4.4.26)代入不等式 $\delta > \alpha_{c0}(\varepsilon)$, 导出为保证倒摆稳定的最低激励频率 ω_{\min} :

$$\omega > \omega_{\min}, \quad \omega_{\min} = \frac{\sqrt{2gl}}{A_0} \quad (f)$$

只要 $A_0 < l/2$, 则 $\delta < \alpha_{cl}(\varepsilon)$ 恒满足, 激励频率 ω 无上限。将数据代入后, 算出

$$\omega_{\min} = 313 \text{ rad/s} = 49.8 \text{ Hz}$$

4.4.3 线性阻尼对稳定图的影响

讨论有阻尼存在的简谐激励的参数振动系统。设阻尼为线性, 在马蒂厄方程内增加线性阻尼项, 写为

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + (\delta + \varepsilon \cos 2t)y = 0 \quad (4.4.39)$$

采用式(4.1.2)表示的坐标变换, 令

$$y = e^{-\gamma t} x \quad (4.4.40)$$

代入方程(4.4.39), 整理后得到

$$\ddot{x} + (\delta_1 + \varepsilon \cos 2t)x = 0 \quad (4.4.41)$$

其中

$$\delta_1 = \delta - \gamma^2 \quad (4.4.42)$$

利用前面的讨论结果可在 (δ_1, ε) 参数平面内作出各阶特征函数 $\alpha_{cn}(\varepsilon)$ 和 $\alpha_{sn}(\varepsilon)$, 并利用关系式(4.4.42)变换为 (δ, ε) 参数平面内不同 γ^2 值对应的稳定图, 如图 4.17 所示。可看出不稳定区随着阻尼系数的增大而缩

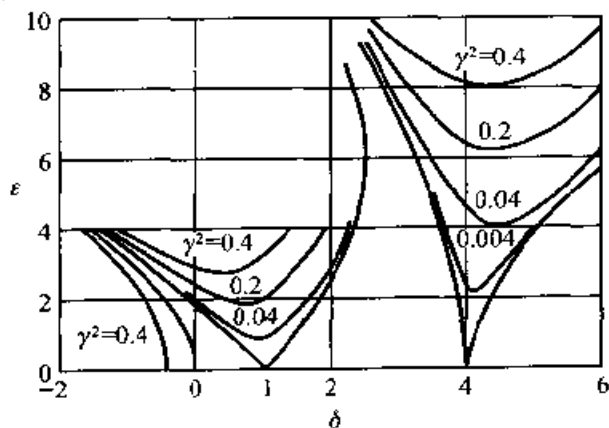


图 4.17 考虑线性阻尼的稳定图

小的趋势。但当参数组合处于不稳定区时并不能抑制振幅的无限增长,而完全不同于线性阻尼对于受迫振动的抑制作用。

§ 4.5 非线性参数振动

4.5.1 带非线性阻尼的参数振动

讨论带非线性阻尼的参数振动系统。设阻尼力与速度的平方成正比,动力学方程为

$$\ddot{x} + \varepsilon \gamma \dot{x} |\dot{x}| + (\delta + \varepsilon \cos 2t)x = 0 \quad (4.5.1)$$

只讨论 δ 接近等于 1 的情形,设

$$\delta = 1 + \varepsilon \sigma \quad (4.5.2)$$

将方程(4.5.1)改写为

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f_1(x, \dot{x}, t) \quad (4.5.3)$$

其中

$$f_1(x, \dot{x}, t) = -\gamma \dot{x} |\dot{x}| - \sigma x - x \cos 2t \quad (4.5.4)$$

采用平均法作近似计算。设

$$x = a \cos \psi, \quad \dot{x} = -a \sin \psi, \quad \psi = t - \theta \quad (4.5.5)$$

代入式(4.5.3),可化为与式(2.4.22)相同的 a 和 θ 的平均化微分方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{2} Q(a, \theta) \\ \dot{\theta} &= \frac{\varepsilon}{2a} P(a, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (4.5.6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} P(a, \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a \cos \psi, -a \sin \psi, t) \cos \psi d\psi \\ Q(a, \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a \cos \psi, -a \sin \psi, t) \sin \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (4.5.7)$$

将式(4.5.4)代入上式,积分化简后代入方程组(4.5.6),得到

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon a}{4} \left(\frac{16\gamma a}{3\pi} + \sin 2\theta \right) \\ \dot{\theta} &= -\frac{\varepsilon}{4} (2\sigma + \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (4.5.8)$$

4.5.2 极限环与动态分岔

令方程(4.5.8)中

$$\dot{a} = \dot{\theta} = 0 \quad (4.5.9)$$

导出系统的稳态周期运动的振幅 a_s 和相角 θ_s 应满足的条件:

$$\frac{16\gamma a_s}{3\pi} + \sin 2\theta_s = 0, \quad 2\sigma + \cos 2\theta_s = 0 \quad (4.5.10)$$

从上式解出

$$a_s = \frac{3\pi}{16\gamma} \sqrt{1 - 4\sigma^2}, \quad \theta_s = \frac{1}{2} \arccos(-2\sigma) \quad (4.5.11)$$

为保证 a_s 有实数解, 要求

$$|\sigma| < \frac{1}{2} \quad (4.5.12)$$

满足此条件时系统存在稳态周期运动。

为判断此周期运动的稳定性, 引入扰动变量:

$$\xi = a - a_s, \quad \eta = \theta - \theta_s \quad (4.5.13)$$

写出方程(4.5.8)在奇点 (a_s, θ_s) 附近的一次近似式:

$$\dot{\xi} + \varepsilon a_s \left(\frac{4\gamma}{3\pi} \xi - \sigma \eta \right) = 0 \quad (4.5.14a)$$

$$\dot{\eta} + \varepsilon a_s \frac{8\gamma}{3\pi} \eta = 0 \quad (4.5.14b)$$

此线性扰动方程的本征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{4\varepsilon\gamma a_s}{3\pi} & -\varepsilon\sigma a_s \\ 0 & \lambda + \frac{8\varepsilon\gamma a_s}{3\pi} \end{vmatrix} = \left(\lambda + \frac{4\varepsilon\gamma a_s}{3\pi} \right) \left(\lambda + \frac{8\varepsilon\gamma a_s}{3\pi} \right) = 0 \quad (4.5.15)$$

此方程确定的二本征值均为负实数, 表明周期运动稳定。因此, 与上节讨论的线性阻尼不同, 非线性阻尼能在不稳定区内起抑制振幅的作用, 其结果是产生 $1/2$ 激励频率的稳定极限环。

极限环的振幅随参数改变, 当 $|\sigma|$ 增大为 $1/2$ 时, $a_s = 0$, 稳定极限环退化为稳定焦点。表明非线性参数振动系统(4.5.3)在 $|\sigma| = 1/2$ 处存在

霍普夫分岔。

§ 4.6 多自由度系统的参数振动

4.6.1 二自由度系统的参数振动

讨论二自由度参数激励的线性系统,其动力学方程为

$$\ddot{x}_i + \omega_{i0}^2 x_i - 2\epsilon \sum_{j=1}^2 f_{ij} x_j \cos \omega t = 0 \quad (4.6.1)$$

其中 $\omega_{i0} (i=1,2)$ 为线性系统的固有频率, ω 为激励频率, 参数 $f_{ij} (i \neq j)$ 使二自由度系统相互耦合。利用多尺度法, 只讨论一次近似解, 令

$$x_i = x_{i0}(T_0, T_1) + \epsilon x_{i1}(T_0, T_1) \quad (i=1,2) \quad (4.6.2)$$

将式(4.6.2), (2.5.4)和(2.5.5)代入方程组(4.6.1), 展开后令 ϵ 的同次幂的系数为零, 得到各阶近似的线性偏微分方程组:

$$D_0^2 x_{i0} + \omega_{i0}^2 x_{i0} = 0 \quad (i=1,2) \quad (4.6.3a)$$

$$D_0^2 x_{i1} + \omega_{i0}^2 x_{i1} = -2D_0 D_1 x_{i0} + 2\cos \omega t \sum_{j=1}^2 f_{ij} x_{j0} \quad (i=1,2) \quad (4.6.3b)$$

零次近似方程(4.6.3a)的解为

$$x_{i0} = A_i(T_1) e^{i\omega_{i0} T_0} + cc \quad (i=1,2) \quad (4.6.4)$$

将零次近似解(4.6.4)代入一次近似方程(4.6.3b)的右边, $\cos \omega t$ 以 $e^{i\omega T_0/2} + cc$ 代替, 导出

$$D_0^2 x_{i1} + \omega_{i0}^2 x_{i1} = -2i\omega_{i0} D_1 A_i e^{i\omega_{i0} T_0} + \sum_{j=1}^2 f_{ij} [A_j e^{i(\omega + \omega_{j0}) T_0} + \bar{A}_j e^{i(\omega - \omega_{j0}) T_0}] \quad (i=1,2) \quad (4.6.5)$$

在一次近似方程(4.6.5)中, 当 $\omega \pm \omega_{j0} = \omega_{i0}$, 即 $\omega = \omega_{i0} \mp \omega_{j0} (i=1,2)$ 时, 均可使系统产生共振而出现久期项。这表明多自由度线性系统的参数振动有多个组合共振频率, 而不同于多自由度线性系统的受迫振动, 后者只有与固有频率相同的共振频率。在上述几种组合振动中, $\omega = \omega_{i0} + \omega_{j0}$ 频率的共振称为和型组合共振, $\omega = \omega_{i0} - \omega_{j0}$ 频率的共振称为差型组合共振。

4.6.2 和型组合共振

设参数振动的激励频率 ω 接近于和型组合共振频率 $\omega_{10} + \omega_{20}$, 令

$$\omega = \omega_{10} + \omega_{20} + \varepsilon\sigma \quad (4.6.6)$$

将上式代入一次近似方程(4.6.5)的右边, 将 εT_0 以 T_1 代替, 导出

$$D_0^2 x_{11} + \omega_{10}^2 x_{11} = (-2i\omega_{10}D_1 A_1 + f_{12}\bar{A}_2 e^{i\sigma T_1})e^{i\omega_{10}T_0} + \dots + cc \quad (4.6.7a)$$

$$D_0^2 x_{21} + \omega_{20}^2 x_{21} = (-2i\omega_{20}D_1 A_2 + f_{21}\bar{A}_1 e^{i\sigma T_1})e^{i\omega_{20}T_0} + \dots + cc \quad (4.6.7b)$$

其中省略号表示其他频率的周期分量。为避免久期项出现, 复振幅 A_1 , A_2 必须满足

$$D_1 A_1 + \frac{i f_{12}}{2\omega_{10}} \bar{A}_2 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (4.6.8a)$$

$$D_1 A_2 + \frac{i f_{21}}{2\omega_{20}} \bar{A}_1 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (4.6.8b)$$

将复振幅 A_1, A_2 写为指数形式:

$$A_1 = a_1 e^{i\lambda T_1}, \quad A_2 = a_1 e^{i(\lambda+\sigma)T_1} \quad (4.6.9)$$

代入方程组(4.6.8)后, 化为

$$\lambda a_1 - \frac{f_{12}}{2\omega_{10}} a_2 = 0 \quad (4.6.10a)$$

$$\frac{f_{21}}{2\omega_{20}} a_1 + (\lambda + \sigma) a_2 = 0 \quad (4.6.10b)$$

此方程组中的非零解条件为

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{f_{12}}{2\omega_{10}} \\ \frac{f_{21}}{2\omega_{20}} & \lambda + \sigma \end{vmatrix} = \lambda^2 + \sigma\lambda + \frac{f_{12}f_{21}}{4\omega_{10}\omega_{20}} = 0 \quad (4.6.11)$$

解出 λ 的两个根:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left\{ \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \frac{f_{12}f_{21}}{\omega_{10}\omega_{20}}} \right\} \quad (4.6.12)$$

$\lambda_{1,2}$ 的实根条件即方程组(4.6.8)的零解稳定性条件, 可写为

$$\sigma^2 > \frac{f_{12}f_{21}}{\omega_{10}\omega_{20}} \quad (4.6.13)$$

此条件若不满足,则 A_1, A_2 的幅度不断增长而导致参数共振。可以看出,若 f_{12} 与 f_{21} 异号,稳定性条件(4.6.13)必自动满足,表明和型参数共振只可能发生于 f_{12} 与 f_{21} 同号的情形。

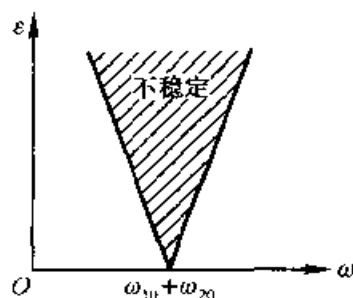


图 4.18 组合参数振动的稳定图

由于 $\sigma^2 = f_{12}f_{21}/\omega_{10}\omega_{20}$ 对应于稳定与不稳定之间的临界状况,因此可代入式(4.6.6)以确定 (ω, ε) 参数平面内的稳定图:

$$\omega \pm \varepsilon \sqrt{\frac{f_{12}f_{21}}{\omega_{10}\omega_{20}}} = \omega_{10} + \omega_{20} \quad (4.6.14)$$

此近似的稳定图边界由两条直线组成(图 4.18),参数共振在不稳定区内发生。

4.6.3 差型组合共振

设参数振动的激励频率 ω 接近于差型组合共振频率 $\omega_{10} - \omega_{20}$, 令

$$\omega = \omega_{10} + \omega_{20} + \varepsilon\sigma \quad (4.6.15)$$

重复以上推导过程,只需在方程(4.6.11)和式(4.6.12)中改变 ω_{20} 的正负号,最终导出

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left[\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + \frac{f_{12}f_{21}}{\omega_{10}\omega_{20}}} \right] \quad (4.6.16)$$

则系统的零解稳定性条件改为

$$\sigma^2 > -\frac{f_{12}f_{21}}{\omega_{10}\omega_{20}} \quad (4.6.17)$$

若 f_{12} 与 f_{21} 同号,则稳定性条件(4.6.17)必自动满足,因此与和型参数共振相反,差型参数共振只可能发生于 f_{12} 与 f_{21} 异号的情形。

例 4.6-1 一端固定的长度为 l 的矩形窄板在支座振动激励下作弯扭振动如图 4.19 所示,试判断其产生组合参数振动的可能性。板的自重忽略不计。^[14]

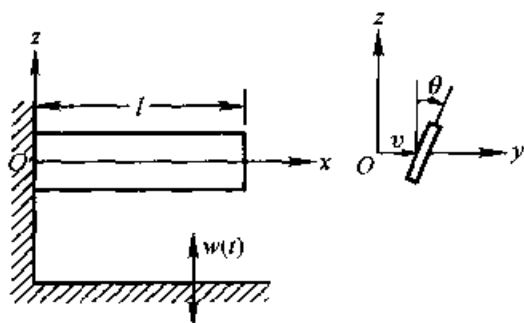


图 4.19 支座振动的矩形窄板

解: 设板的截面保持刚性, 以截面中心沿 y 轴的位移 $v(x, t)$ 和截面绕中心轴 x 的扭角 $\theta(x, t)$ 为独立变量, 简化为二自由度系统。当支座沿 z 轴作频率为 ω 的振动 $w(t) = W_0 \cos \omega t$ 时, 板的动力学方程为

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\rho_l}{2} \frac{d^2 w}{dt^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(l-x)^2 \theta] + \rho_l \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (a)$$

$$GI_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\rho_l}{2} \frac{d^2 w}{dt^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho_l I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (b)$$

其中 ρ_l 为单位长度质量, EI 和 GI_p 分别为抗弯和抗扭刚度, I_p 为截面的二次极矩。采用伽辽金对方程组(a), (b)作离散化, 令

$$v(x, t) = \phi_1(x) q_1(t), \quad \theta(x, t) = \phi_2(x) q_2(t) \quad (c)$$

其中 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 为悬臂梁的模态函数和杆的扭转模态函数。将式(c)代入方程组(a), (b)后化为

$$\ddot{q}_1 + \omega_{10}^2 q_1 - 2\epsilon f_{12} q_2 \cos \omega t = 0 \quad (d)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_{20}^2 q_2 - 2\epsilon f_{21} q_1 \cos \omega t = 0 \quad (e)$$

其中

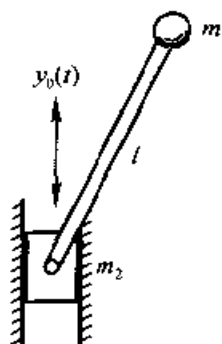
$$\left. \begin{aligned} \omega_{10}^2 &= \frac{EI}{\rho_l} \int_0^l \frac{\phi_1^{(4)}(x)}{\phi_1(x)} dx, \quad \omega_{20}^2 = \frac{G}{\rho_l I_p} \int_0^l \frac{\phi_2''(x)}{\phi_2(x)} dx, \quad \epsilon = \frac{W_0}{l} \\ f_{12} &= \frac{l\omega^2}{4} \int_0^l \frac{1}{\phi_1(x)} \frac{d^2}{dx^2} [(l-x)^2 \phi_2(x)] dx, \quad f_{21} = \frac{l\omega^2}{4 I_p} \int_0^l \frac{\phi_1''(x)}{\phi_2(x)} dx \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

将各模态函数代入积分式(f)计算后, 得到的 f_{12} 与 f_{21} 同号。根据以上分析, 板在支座振动激励下只可能发生和型组合共振。

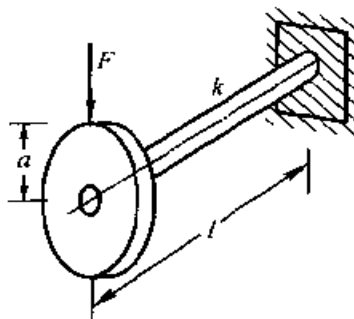
习 题

4.1 在图示倒置单摆系统中,质量 $m = 1 \text{ kg}$ 的物块与长 $l = 0.5 \text{ m}$ 的无自重刚性杆固连,支承点按规律 $y_0 = A_0 \sin \omega t$ 运动,振幅 $A_0 = 10 \text{ mm}$ 。试求摆微幅振动稳定时 ω 所满足的条件。

4.2 图示扭振系统中,轴的抗扭刚度为 $k = 80 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$,在转动惯量为 $J = 0.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的圆盘上,距轴线 $a = 0.2 \text{ m}$ 处受力 $F = F_0 + F_1 \sin \omega t$ 作用, $F_0 = 100 \text{ N}$, $F_1 = 40 \text{ N}$, $\omega = 10 \text{ rad/s}$ 。试确定系统微幅振动的稳定性。



题 4.1 图

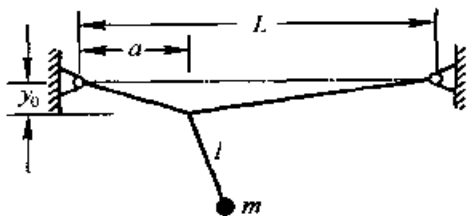


题 4.2 图

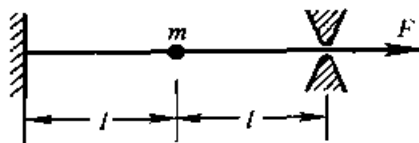
4.3 图示完全柔性的长度为 L 的无自重弦线上吊一摆长为 l , 质量 $m = 0.1 \text{ kg}$ 的单摆。摆动过程中弦张力 F 为常数。悬挂点距左端点 $a = 0.3L$ 。初始时悬挂点有相对静平衡位置的铅垂位移 $y_0 = 0.1L$, 初速度为零。对以下两种情形讨论摆的稳定性:

(1) $F = 40 \text{ N}$, $l = 0.3L$; (2) $F = 10 \text{ N}$, $l = 0.1L$ 。

4.4 图示质量 $m = 0.25 \text{ kg}$ 的物块吊在两根长 $l = 0.2 \text{ m}$ 的弦线上。弦中张力按规律 $F = F_0 + F_1 \sin \omega t$ 变化, 其中 $F_0 = 20 \text{ N}$, $F_1 = 10 \text{ N}$, $\omega = 25 \text{ rad/s}$ 。试确定物块作微幅铅垂振动的稳定性。



题 4.3 图

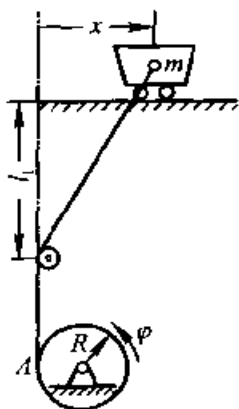


题 4.4 图

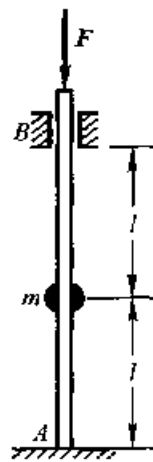
4.5 图示质量 $m = 500 \text{ kg}$ 的小车连接一受拉绳索, 绳的另一端与半径 $R = 0.1 \text{ m}$ 的鼓轮在点 A 处连接。在平衡状态 ($x = 0$), 绳长 $l_0 = 1 \text{ m}$, 张力 $F_0 = 1000 \text{ N}$,

轨道距小滑轮 $l_1 = 0.7 \text{ m}$ 。绳索截面积 $A = 10^{-4} \text{ m}^2$, 弹性模量 $E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$ 。鼓轮按规律 $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$ 转动, 其中 $\varphi_0 = 0.1 \text{ rad}$, $\omega = 10 \text{ rad/s}$ 。试建立小车水平微幅振动的动力学方程并讨论稳定性。

4.6 在图示系统中, 长度为 $2l$ 的无自重弹性杆 AB 承受交变轴向力 $F = F_0 + F_1 \sin \omega t$, 其中 $F_0 = 50 \text{ N}$, $F_1 = 20 \text{ N}$, $\omega = 30 \text{ rad/s}$ 。杆的中点处固接一质量 $m = 5.2 \text{ kg}$ 的物块。杆的 A 端固定, B 端可滑动, 杆的截面二次矩 $I = 10^{-9} \text{ m}^4$, 弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$ 。试建立物块的微幅振动微分方程并讨论稳定性。



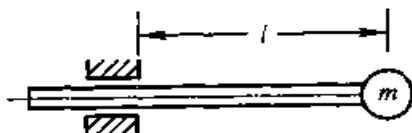
题 4.5 图



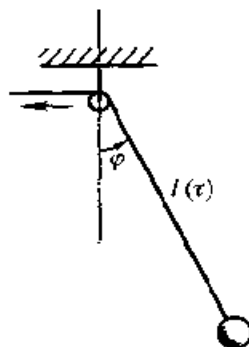
题 4.6 图

4.7 无自重梁在自由端固定一质量 $m = 2 \text{ kg}$ 的物块, 如图所示。梁的截面二次矩 $I = 10^{-8}/12 \text{ m}^4$, 弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$ 。梁的长度按规律 $l = l_0 - l_1 \sin \omega t$ 随时间变化, 其中 $l_0 = 1 \text{ m}$, $l_1 = 0.2 \text{ m}$, $\omega = 20 \text{ rad/s}$ 。试讨论物块微幅铅垂振动的稳定性。

4.8 图示单摆的摆长 l 缓慢变化。 $l = l(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$, $\varepsilon \ll 1$ 。设初始时摆偏离平衡位置 φ_0 , 试求近似周期运动的幅值和频率。



题 4.7 图



题 4.8 图

4.9 研究非线性振动系统

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + \epsilon x^2) = F \cos \omega t$$

周期为 $4\pi/\omega$ 的亚谐波解的稳定性。

4.10 研究达芬方程

$$\dot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon x^3 = F \sin \omega t$$

有精确谐波解 $x = a \sin(\omega t/3)$ 的条件, 讨论这类解的稳定性。

4.11 对于有弱非线性项的参数振动系统

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \epsilon \cos \omega t)x + \epsilon(C\dot{x} + \dot{x}^2 \operatorname{sgn} \dot{x} + Bx^3) = 0$$

其中 $\omega \approx 2\omega_0$ 。分别讨论零解和非零周期解的稳定性。

4.12 试用平均法建立参数振动

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 + 2\epsilon \cos 3t)x = 0$$

振幅和相位缓慢变化所满足的微分方程。

4.13 试分别用多尺度法和平均法建立参数振动

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 + 2\epsilon x^2 \cos 2t)x = 0$$

振幅和相位缓慢变化所满足的微分方程, 比较二者结果。

4.14 试分别用多尺度法和平均法建立二自由度参数振动系统

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_{10}^2 x_1 + \epsilon(c_{11}x_1 + c_{12}x_2)\cos \omega t = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_{20}^2 x_2 + \epsilon(c_{21}x_1 + c_{22}x_2)\cos \omega t = 0 \end{cases}$$

的近似周期解振幅和相位满足的微分方程(其中 $\omega \approx \omega_{10} \pm \omega_{20}$)。

第五章 分岔理论基础

分岔现象是指振动系统的定性行为随着系统参数的改变而发生质的变化。分岔现象的研究起源于 18 世纪以来对弹性力学、天体力学、流体力学和非线性振动中的失稳问题。然而,长期以来分岔现象的研究是分散在各个具体应用领域中进行。直到 20 世纪 70 年代,分岔理论才形成研究各种具体分岔现象中共性问题的分支学科。分岔理论的研究不仅揭示了系统的各种运动状态之间的相互联系和转化,而且与混沌密切相关,成为非线性动力学的重要组成部分。除上述几种学科以外,分岔问题也存在于机器人动力学、飞行器动力学、结构动力学、控制理论、电子学、化学反应动力学、甚至生态学和经济学等学科领域。因此分岔理论有着广泛的应用背景。

关于静态分岔和动态分岔现象,读者在本书的 § 1.2 和 § 3.3 中已有了初步了解。本章较系统地叙述分岔理论的基础知识。包括分岔现象概述,分岔问题的降维和简化方法,霍普夫分岔及其控制,闭轨迹的分岔和分岔问题数值方法的简述等内容。限于篇幅,在阐述分岔理论的基本思想的过程中,略去了一些需要较多数学准备知识的内容,若需要深入研究,可以参阅相关的专著。

§ 5.1 分岔现象

5.1.1 结构稳定性

§ 1.1 中讨论的李雅普诺夫稳定性理论研究单个系统受初始扰动后的动力学行为。结构稳定性与此不同,它研究一族差别不大的系统的相轨迹拓扑性质之间的关系。系统受到扰动后转变为差别不大的另一系统,结构稳定性问题是要确定系统相轨迹拓扑结构保持不变的条件。

单值连续且其逆也单值连续的变换称为同胚。如果相空间之间的同胚将一系统的相轨迹变为另一系统的相轨迹,且保持时间定向,则两个系统称为拓扑轨道等价。例如,平面线性系统的稳定焦点和稳定结点为拓

扑轨道等价,不同平面系统的中心也为互相拓扑轨道等价,但结点、中心和鞍点之间均不是拓扑轨道等价。

如果一系统受到小扰动后产生的新系统与原系统拓扑轨道等价,则称此系统结构稳定。不具备结构稳定性的系统称为结构不稳定。1937年安德罗诺夫(A. A. Andronov)和庞特里雅金(L. S. Pontryagin)首先研究结构稳定性问题。他们证明了以下定理:

定理:平面系统结构稳定的充分必要条件为:

- (1) 仅有有限个平衡点^①,且均为双曲平衡点;
- (2) 不存在联结鞍点的相轨迹;
- (3) 仅有有限个闭轨迹,且均为双曲的。

定理的证明过程较长,可参阅文献[24]第177~187页或文献[27]第513~528页。仅举一例说明条件(1)的必要性。

例 5.1-1 单自由度线性无阻尼自由振动系统的结构稳定性。

解:固有频率为 ω_0 的单自由度无阻尼自由振动系统的动力学方程可写为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega_0^2 x \quad (a)$$

其平衡点为中心,不是双曲的,不满足条件(1)。相轨迹为椭圆族。对此系统增加阻尼项成为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega_0^2 x - \epsilon y \quad (b)$$

对于任意小的 $\epsilon > 0$,非保守系统(b)的平衡点为稳定焦点,不存在闭轨迹,不与保守系统(a)拓扑轨道等价。根据上述定理,系统(a)不具有结构稳定性。系统(b)具有结构稳定性。

1962年比索杜(M. Peixoto)将安德罗诺夫和庞特里雅金的结果推广到有界闭合可定向二维流形,并且证明了有界闭合可定向二维流形上的结构稳定系统构成有界闭合可定向二维流形上的全体系统所成集合的一个稠密开集。这一结果表明,有界闭合可定向二维流形上的结构稳定系统是非常普遍的,即使结构不稳定系统,也可以用结构稳定系统任意地逼近。还可以推广安德罗诺夫和庞特里雅金的结果到高维($n \geq 2$)系统,但

^① 平衡点在第一章中称为奇点,本章中改称为平衡点,以避免与下文中定义的奇异点概念产生混淆。

1966年斯梅尔举出反例说明当 $n \geq 2$ 时 n 维流形上的结构稳定系统不再构成全体系统所成集合的稠密开集。

对实际系统建立的动力学模型必须具有结构稳定性。因为建立模型过程中总要理想化处理,如果数学模型对于建模误差极为敏感,便不能反映现实系统的动力学性态。

5.1.2 分岔的基本概念

分岔问题起源于力学失稳现象的研究。伯努利(D. I. Bernoulli)和欧拉(L. Euler)等早在18世纪就已研究过轴向压力作用下的杆件屈曲问题。达朗贝尔(J. le R. d'Alembert)提出了自引力液体旋转平衡形状的问题,以考察恒星和行星的形成。1885年庞加莱提出了旋转液体星平衡形体演化过程的分岔理论。20世纪30年代,范德波尔、安德罗诺夫等发现非线性振动中的大量分岔现象,并研究了分岔与结构稳定性之间的关系。

若任意小的参数变化会使结构不稳定的系统的相轨迹拓扑结构发生突然变化,则称这种变化为分岔。因此可将分岔的定义叙述为:

对于含参数的系统:

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (5.1.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量, $\mu \in \mathbb{R}^m$ 为分岔参数,即 §1.2.4 中定义的分岔参数在 m 维情形的拓广。当参数 μ 连续地变动时,若系统(5.1.1)的相轨迹的拓扑结构在 $\mu = \mu_0$ 处发生突然变化,则称系统(5.1.1)在 $\mu = \mu_0$ 处出现分岔。 μ_0 称为分岔值或临界值。 (x, μ_0) 称为分岔点。在参量 μ 的空间 \mathbb{R}^m 中,由分岔值构成的集合称为分岔集。在 (x, μ) 的空间 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 中,平衡点和极限环随参数 μ 变化的图形称为分岔图。

在一些应用问题中,有时只需要研究平衡点和闭轨迹附近相轨迹的变化,即在平衡点或闭轨迹的某个邻域中的分岔,这类分岔问题称为局部分岔。如果需要考虑相空间中大范围的分岔性态,则称为全局分岔。显然,系统的“局部”和“全局”性质是密切相关的,局部分岔本身也是全局分岔研究的重要内容。

如果只研究平衡点个数和稳定性随参数的变化,则称为静态分岔。读者在 §1.2.4 中对静态分岔已有了初步的了解。动态分岔是指静态分岔之外的分岔现象。闭轨迹的个数和稳定性的突然变化就属于动态分岔,例如 §2.1 和 §2.7 中叙述的跳跃现象。

如果系统的分岔性态不受任何结构小扰动的影响而改变,则称分岔

具有通有性。非通有的分岔称为具有退化性。结构小扰动不影响通有分岔的性态,因而可以认为通有分岔是结构稳定的;而退化分岔是结构不稳定的。通过适当引进附加参数可以将退化分岔转化为通有分岔,这种方法称为开折。

在分岔研究中,一般只考虑参数在分岔值附近时系统定性性态的变化。然而,在分岔参数的整个变化范围内,系统可能在不同的分岔值处相继地出现分岔。这种相继地分岔对于研究系统随参数演变的全局过程起重要作用。

分岔现象的研究主要可以概括为四个方面。(1) 确定分岔集,即建立分岔的必要条件和充分条件;(2) 分析分岔的定性性态,即出现分岔时系统拓扑结构随参数变化情况;(3) 计算分岔解,尤其是平衡点和极限环;(4) 考察不同分岔的相互作用,以及分岔与混沌等其它动力学现象的关系。

5.1.3 静态分岔的必要条件

根据静态分岔的定义,研究系统(5.1.1)的静态方程

$$f(x, \mu) = 0 \quad (5.1.2)$$

解的个数和性质随 μ 的突然变化,也就是研究代数方程(5.1.2)的多重解问题。设 f 是足够光滑的函数,即 f 对 x 和 μ 有充分多阶连续偏导数。

设 μ_0 为一个静态分岔值,记 (x_0, μ_0) 为静态分岔点,则有

$$f(x_0, \mu_0) = 0 \quad (5.1.3)$$

若在 (x_0, μ_0) 计算的 f 关于 x 的雅可比矩阵 $D_x f(x_0, \mu_0)$ 是可逆的,根据隐函数存在定理,方程(5.1.3)有唯一解 $x = \varphi(\mu)$,使得

$$f(\varphi(\mu), \mu) \equiv 0, \quad x_0 = \varphi(\mu_0) \quad (5.1.4)$$

这与 (x_0, μ_0) 是静态分岔点产生矛盾,因此 $D_x f(x_0, \mu_0)$ 不可逆为系统(5.1.1)在 (x_0, μ_0) 静态分岔的必要条件。满足式(5.1.3)且使 $D_x f(x_0, \mu_0)$ 不可逆的点称为系统(5.1.1)的奇异点。显然,奇异点必为平衡点,而平衡点可能不是奇异点。

根据线性代数知识,平衡点 (x_0, μ_0) 为奇异点的上述必要条件,等价于满足下列条件之一:(1) $D_x f(x_0, \mu_0)$ 的行列式为零;(2) $D_x f(x_0, \mu_0)$ 至少有一个零本征值,即 (x_0, μ_0) 为非双曲平衡点;(3) $D_x f(x_0, \mu_0)$ 所对应

线性变换的零空间的维数大于或等于 1。

需要说明的是,上述分岔的必要条件并不是充分条件,即奇异点可能不是分岔点,以下举例说明。

例 5.1-2 讨论一维系统

$$\dot{x} = x^3 - \mu \quad (a)$$

平衡点(0,0)是否为静态分岔点。

解:系统(a)有奇异点(0,0),令 $f(x, \mu) = x^3 - \mu$, 导出

$$f(0,0) = 0, \quad D_x f(0,0) = 3x^2 \Big|_{(0,0)} = 0 \quad (b)$$

满足分岔的必要条件。但系统(a)对任意实数 μ , 都只有唯一平衡点 $\sqrt[3]{\mu}$ 。因此,平衡点(0,0)不是静态分岔点。

根据上述结构稳定性定理,平面系统的平衡点和闭轨迹失去双曲性及出现联结鞍点的相轨迹时将产生分岔。本节仅讨论非双曲平衡点的静态分岔,并举例说明出现联结鞍点的相轨迹时将产生的全局分岔。平衡点的动态分岔和非双曲闭轨迹的分岔将分别在 § 5.4 和 § 5.5 中讨论。

5.1.4 平衡点的静态分岔

以下通过若干例子说明平衡点静态分岔的不同类型。为突出问题的实质,仅讨论含一个分岔参数的平面系统

$$\dot{x}_1 = P(x_1, x_2, \mu), \quad \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2, \mu) \quad (5.1.5)$$

若 $\mu = \mu_0$ 时系统有非双曲平衡点 (x_{1s}, x_{2s}) , 即

$$P(x_{1s}, x_{2s}, \mu_0) = 0, \quad Q(x_{1s}, x_{2s}, \mu_0) = 0 \quad (5.1.6)$$

且雅可比矩阵有实部为零的本征值,则 μ 在 μ_0 附近的微小变化可能导致 (x_{1s}, x_{2s}) 附近相轨迹拓扑结构的变化,产生静态分岔。

例 5.1-3 讨论平面系统

$$\dot{x} = \mu x - x^3, \quad \dot{y} = -y \quad (a)$$

的分岔。

解:系统(a)当 $\mu \leq 0$ 时有平衡点(0,0),其雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (b)$$

当 $\mu < 0$ 时, J 的两个本征值均为负, $(0, 0)$ 为稳定结点。 $\mu = 0$ 时 J 有零本征值, $(0, 0)$ 为非双曲平衡点, 此处发生分岔。在 $\mu > 0$ 时有 3 个平衡点, $(0, 0)$ 和 $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$, 其雅可比矩阵分别为

$$J_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_{2,3} = \begin{pmatrix} -\mu\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (c)$$

J_1 的本征值为异号实数, $(0, 0)$ 为鞍点; $J_{2,3}$ 的本征值为负实数, $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$ 为稳定结点。相轨迹变化和分岔图分别如图 5.1 和 5.2 所示, 实线表示稳定平衡点, 虚线表示不稳定平衡点。这种分岔称为叉式分岔。当新增加的平衡点在 μ 大于分岔值的范围内出现时, 称分岔为超临界叉式分岔, 否则称为亚临界叉式分岔。图 5.1 表示的分岔为超临界。

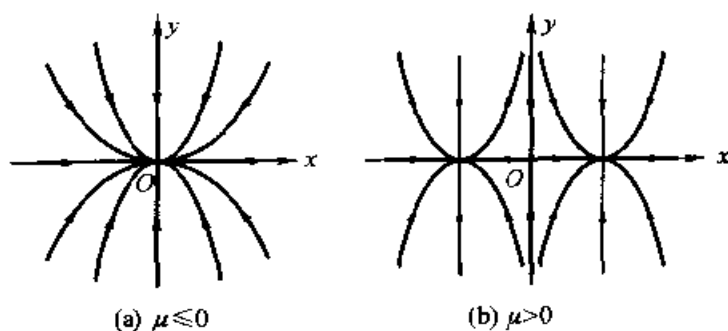


图 5.1 叉式分岔的相轨迹变化

例 5.1-4 讨论平面系统

$$\dot{x} = \mu - x^2, \quad \dot{y} = -y \quad (a)$$

的分岔。

解: 系统(a)当 $\mu < 0$ 时无平衡点。当 $\mu = 0$ 时有平衡点 $(0, 0)$, 雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (b)$$

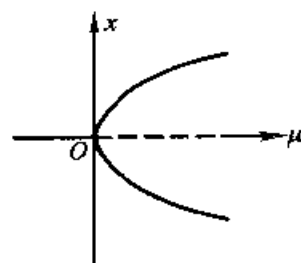


图 5.2 叉式分岔图

$(0, 0)$ 为非双曲平衡点, 这种平衡点属于退化情形, 是一种高阶奇点, 由半个鞍点和半个结点组成, 称作鞍结点。此处发生分岔。当 $\mu > 0$ 时有两个平衡点, $(\sqrt{\mu}, 0)$ 和 $(-\sqrt{\mu}, 0)$ 其雅可比矩阵分别为

$$J_1 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (c)$$

J_1 的本征值为负实数, $(\sqrt{\mu}, 0)$ 为稳定结点; J_2 的本征值为异号实数, $(-\sqrt{\mu}, 0)$ 为鞍点。相轨迹变化和分岔图分别如图 5.3 和 5.4 所示, 实线表示稳定平衡点, 虚线表示不稳定平衡点。这种分岔称为鞍结分岔。

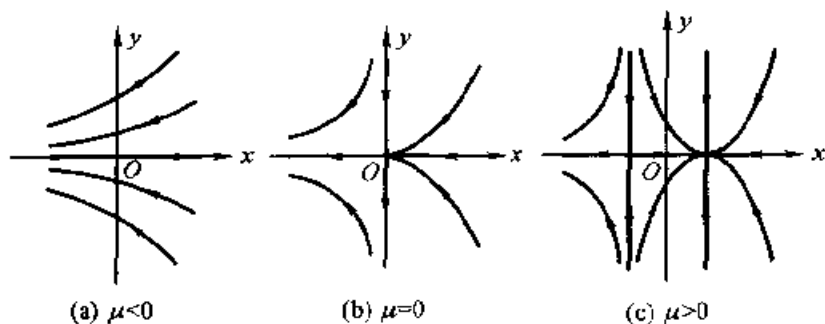


图 5.3 鞍结分岔的相轨迹变化

例 5.1-5 讨论平面系统

$$\dot{x} = \mu x - x^2, \quad \dot{y} = -y \quad (a)$$

的分岔。

解: 系统(a)有平衡点 $(0, 0)$ 和 $(\mu, 0)$, 其雅可比矩阵分别为

$$J_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (b)$$

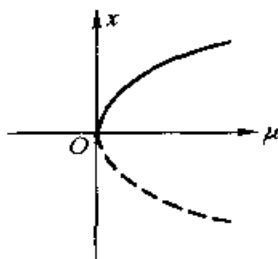


图 5.4 鞍结分岔图

当 $\mu < 0$ 时系统(a)有稳定结点 $(0, 0)$ 和鞍点 $(\mu, 0)$, $\mu = 0$ 时系统(a)有非双曲平衡点 $(0, 0)$, 为鞍结点, 此处发生分岔。在 $\mu > 0$ 时系统(a)有鞍点 $(0, 0)$ 和稳定结点 $(\mu, 0)$, 相轨迹变化和分岔图分别如图 5.5 和 5.6 所示。在 $\mu = 0$ 处两个平衡点的稳定性互换, 称为跨临界分岔。

叉式分岔、鞍结分岔和跨临界分岔是非双曲平衡点静态分岔的基本形式。实际的分岔可能比基本形式复杂, 以下仅以一维系统为例, 说明较为复杂的静态分岔现象。

例 5.1-6 讨论一维系统

$$\dot{x} = \mu x - x^3 + \alpha \quad (a)$$

的分岔, 其中小参数 $\alpha \geq 0$ 。

解: 系统(a)的平衡点满足关于 x 的代数方程:

$$x^3 - \mu x - \alpha = 0 \quad (b)$$

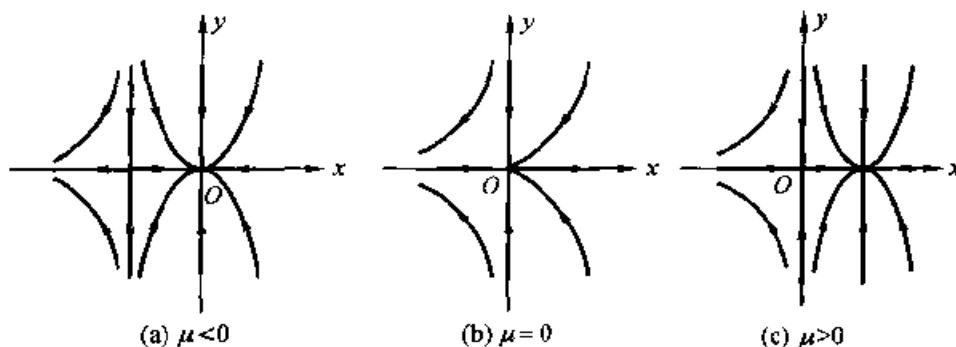


图 5.5 跨临界分岔的相轨迹变化

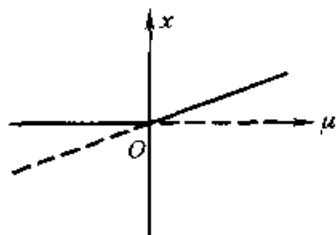


图 5.6 跨临界分岔图

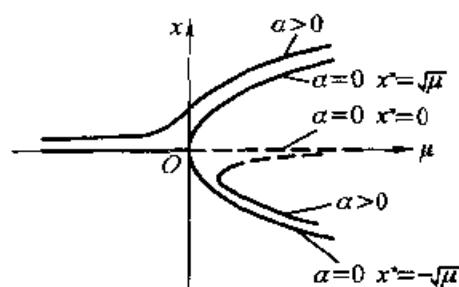


图 5.7 有缺陷的分岔

此三次代数方程的判别式为

$$R = -\frac{\mu^3}{27} + \frac{\alpha^2}{2} \quad (c)$$

当 $\mu \leq 0$ 时, $R > 0$, 方程(b)有惟一实根; 对于充分小的 $\alpha \geq 0$, 当 $\mu > 0$ 时, $R < 0$, 方程(b)有 3 个实根。分岔图如图 5.7 所示。比较 $\alpha = 0$ 和 $\alpha > 0$ 的两种情形, 对于 $\alpha > 0$ 的情形, 当 $\mu < 0$ 时, $\alpha = 0$ 时相应的平衡点 0 向上平移, 但仍是稳定的; 当 $\mu > 0$ 时, $\alpha = 0$ 时的平衡点 0 向下平移, 但仍是稳定的, $\alpha = 0$ 时的平衡点 $\sqrt{\mu}$ 和 $-\sqrt{\mu}$ 分别向上平移, 仍是稳定的。 $\alpha > 0$ 时无明显的分岔点, μ 从负变到正时, 解的分支平滑地过渡到新的分支解。这类分岔称为有缺陷的分岔。

上例还表明, 叉式分岔为退化分岔。类似的例子可以说明跨临界分岔也是退化分岔。事实上, 对于单参数系统的静态分岔而言, 可以证明只有鞍结分岔是通有分岔。

例 5.1-7 讨论一维系统

$$\dot{x} = \mu x + x^3 - x^5 \quad (a)$$

的分岔。

解: 系统(a)的平衡点满足 x 的代数方程

$$x(x^4 - x^2 - \mu) = 0 \quad (b)$$

当 $\mu < -1/4$ 时, 有稳定平衡点 0; 当 $-1/4$

$\leq \mu < 0$ 时, 有稳定平衡点 0 和

$\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4\mu})}$, 及不稳定平衡点

$\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4\mu})}$; 当 $\mu \geq 0$ 时, 有不

稳定平衡点 0 和稳定平衡点

$\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4\mu})}$ 。分岔图如 5.8 所

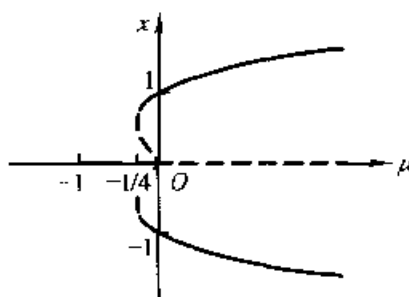


图 5.8 有滞后的分岔

示。从中可以看出, 系统(a)仍有分岔点(0,0), 在分岔点附近, 分岔类似于亚临界叉形分岔; 但远离分岔点时, 存在着滞后和跳跃现象。这类分岔称为有滞后的分岔。

5.1.5 全局分岔举例

§ 1.2 中已定义联结鞍点的相轨迹称为分隔线, 其中首尾通过同一鞍点的相轨迹, 称为同宿轨道, 联结不同鞍点的相轨迹称为异宿轨道。存在同宿或异宿轨道为结构不稳定, 适当的小扰动可使相轨迹的拓扑结构发生变化而出现分岔, 这种分岔是一种全局分岔, 也属于动态分岔。

例 5.1-8 讨论平面系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - x^2 + \mu y \quad (a)$$

的分岔。

解: 系统(a)有两个平衡点: 鞍点(0,0)和中心或焦点(1,0)。当 $\mu = 0$ 时, 系统(a)为保守系统, 存在同宿轨道。对于 $\mu < 0$ 或 $\mu > 0$, 同宿轨道不再存在。相轨迹变化如图 5.9 所示。这种分岔称为同宿分岔。

例 5.1-9 讨论平面系统

$$\dot{x} = \mu + x^2 - xy, \quad \dot{y} = y^2 - x^2 - 1 \quad (a)$$

的分岔。

解: 系统(a)当 $\mu = 0$ 时有鞍点(0, -1)和(0, 1), $x = 0$ 即 y 轴为联结两个鞍点的异宿轨道。当 $\mu \neq 0$ 时, 略去小量 μ 二次以上的项, 系统有鞍

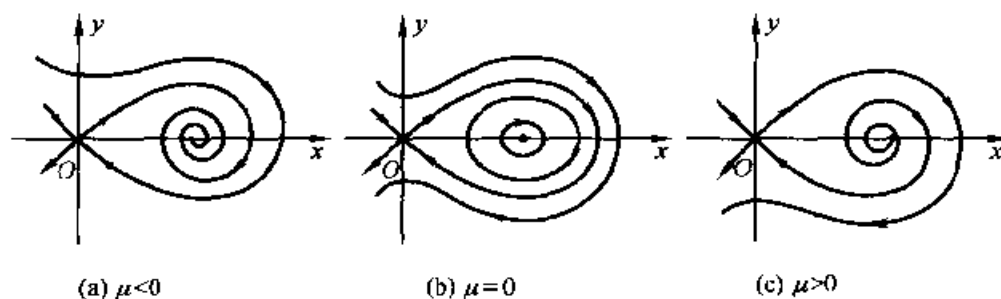


图 5.9 同宿分岔的相轨迹变化

点 $(-\mu, -1)$ 和 $(\mu, 1)$,且在 $y = \pm 1$ 处 $x = \pm \mu$ 为非零常量。因此原来的异宿轨道变为两条不同的过鞍点相轨迹。相轨迹变化如图 5.10 所示。这种分岔称为异宿分岔。

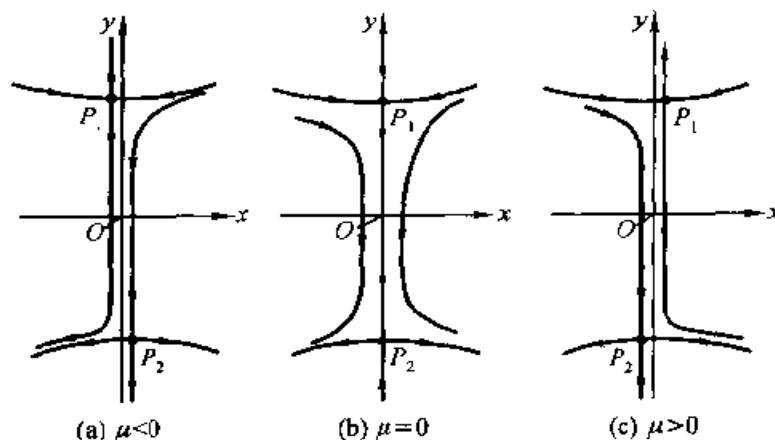


图 5.10 异宿分岔的相轨迹变化

在高维系统($n \geq 3$)中,同宿分岔和异宿分岔的发生可能导致混沌运动的出现。在第六章中将进一步讨论这方面的问题。

§ 5.2 李雅普诺夫-施密特约化

5.2.1 分岔问题的降维约化

分岔理论的重要方面是系统的降维,即将原来需要研究的高维系统转化为较低维数的系统而保持分岔特性不变。李雅普诺夫-施密特约化(简称 LS 约化)是将高维非线性系统平衡点分岔问题等效地简化为低维系统问题的一种方法。下节叙述的中心流形定理提供了另一种研究分岔

问题的降维方法。

LS 约化是将高维非线性系统平衡点分岔问题等效地简化为低维系统问题的方法。其基本思想是通过空间的分解将描述平衡点的非线性代数方程分别投影到两个子空间上而得到两个方程,其中一个存在唯一解,将该唯一解代入另一个方程,得到一个较低维的方程,从而将原来高维系统中的分岔问题简化为低维系统的分岔问题。

上述系统降维方法的最初思想是 1892 年李雅普诺夫在研究一次近似方程具有零本征值的非线性系统零解稳定性问题时提出,1906 年他应用这种方法研究庞加莱讨论旋转液体星时提出的分岔问题。1908 年施密特(E. Schmidt)在研究线性和非线性积分方程时也应用和发展了这种方法。因此这种降维方法称为 LS 约化

LS 约化可以应用于无穷维系统的约化。为便于接受,这里仅针对有限维系统叙述 LS 约化方法。

5.2.2 LS 约化的过程

系统(5.1.1)的平衡点满足代数方程:

$$f(x, \mu) = 0 \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad \mu \in J \subset \mathbb{R}^m \quad (5.2.1)$$

不失一般性设 $(0, 0) \in U \times J$ 为系统(5.1.1)的奇异点,即在 $(0, 0)$ 计算的雅可比矩阵 $A = D_x f(0, 0)$ 不可逆。亦即矩阵 A 存在零本征值,设零本征值的数目为 k 。根据线性代数知识,存在 k 维核空间 $\text{Ker } A$ 满足对任意 $y \in \text{Ker } A$ 有 $Ay = 0$, 矩阵 A 对应的线性变换的值域 $\text{range } A$ 为 $n - k$ 维线性空间。分别记线性空间 $\text{Ker } A$ 和 $\text{range } A$ 正交补空间为 $M_1 = \text{Ker } A^\perp$ 和 $M_2 = \text{range } A^\perp$, 则 M_1 和 M_2 的维数分别为 $n - k$ 和 k 。系统(5.1.1)状态变量 x 的空间 \mathbb{R}^n 有直和分解:

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker } A \oplus M_1 \quad (5.2.2)$$

$$\mathbb{R}^n = M_2 \oplus \text{range } A \quad (5.2.3)$$

令 P 为从 \mathbb{R}^n 到 $\text{range } A$ 的正交投影, 则从 \mathbb{R}^n 到 M_2 的正交投影为 $Q = I - P$, 其中 I 为恒等变换。 P 和 Q 均为线性空间 \mathbb{R}^n 中的算子, 对于这里讨论的有限维情形, 可以简单地理解为矩阵。方程(5.2.1)等价于联立方程:

$$Pf(x, \mu) = 0 \quad (5.2.4)$$

$$Qf(x, \mu) = 0 \quad (5.2.5)$$

根据直和分解(5.2.2),对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 唯一存在 $u \in \text{Ker } A$ 和 $v \in M_1$ 使得 $x = u + v$ 。故可定义映射 $\Psi: \text{Ker } A \times M_1 \times J \rightarrow \text{range } A$ 使得

$$\Psi(u, v, \mu) = Pf(u + v, \mu) \quad (5.2.6)$$

相应地式(5.2.4)等价于

$$\Psi(u, v, \mu) = 0 \quad (5.2.7)$$

根据复合函数的求导公式,由式(5.2.6)得到

$$D_v \Psi(0, 0, 0) = PD_x f(0, 0) = PA = A \quad (5.2.8)$$

其中最后的等式考虑到 P 为从 \mathbb{R}^n 到 $\text{range } A$ 的正交投影。若限制 A 仅作用在 M_1 上,则线性变换 A 为一对一且满射,因此是可逆映射。根据隐函数定理,在 $(u, v, \mu) = (0, 0, 0)$ 的某个邻域中,方程(5.2.7)存在唯一解

$$v = \psi(u, \mu) \quad (5.2.9)$$

将式(5.2.9)代入式(5.2.5),得到

$$F(u, \mu) = 0 \quad (5.2.10)$$

其中映射 $F: \text{Ker } A \times J \rightarrow M_2$ 定义为

$$F(u, \mu) = Qf(u + \psi(u, \mu), \mu) \quad (5.2.11)$$

在奇异点 $(x, \mu) = (0, 0)$ 的某个邻域中,方程(5.2.1)的解与方程(5.2.10)的解存在一一对应关系:

$$x = u + \psi(u, \mu) \quad (5.2.12)$$

因此方程(5.2.1)的求解问题等价于在较低维数的核空间 $\text{Ker } A$ 中的方程(5.2.10)的求解问题。方程(5.2.10)称为方程(5.2.1)的约化方程。约化方程包含了研究原方程的解在奇异点邻域的性质态的全部信息,从而简化了静态分岔问题的分析。

在实际计算中,往往采用坐标表示。设 $\{i_l\}$ 和 $\{j_l\}$ ($l = 1, 2, \dots, k$) 分别为 $\text{Ker } A$ 和 M_2 的正交标准基,则对任意 $u \in \text{Ker } A$, 存在 $y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$, 使得

$$u = \sum_{l=1}^k y_l i_l \quad (5.2.13)$$

将式(5.2.13)代入式(5.2.10),得到

$$g(y, \mu) = 0 \quad (5.2.14)$$

其中映射 $g: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ 定义为

$$g(y, \mu) = Qf\left[\sum_{l=1}^k y_l i_l + \psi\left(\sum_{l=1}^k y_l i_l, \mu\right), \mu\right] \quad (5.2.15)$$

注意到 $Q = I - P$, 且对任意 $z \in \mathbb{R}^n$ 有 $Pz \in \text{range } A$, 故 \mathbb{R}^n 中的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 满足

$$\langle j_l, Qz \rangle = \langle j_l, (I - P)z \rangle = \langle j_l, z \rangle \quad (l = 1, 2, \dots, k) \quad (5.2.16)$$

根据上式, 若定义约化函数:

$$g_l(y, \mu) = \left\langle j_l, f\left(\sum_{i=1}^k y_i \dot{t}_i + \psi\left(\sum_{i=1}^k y_i \dot{t}_i, \mu\right), \mu\right) \right\rangle \quad (l = 1, 2, \dots, k) \quad (5.2.17)$$

可以将式(5.2.14)写为关于 $y_l (l = 1, 2, \dots, k)$ 的方程组:

$$g_l(y, \mu) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, k) \quad (5.2.18)$$

式(5.2.18)即式(5.2.14)与式(5.2.10)完全等价, 称为约化方程。一般而言, 式(5.2.10)便于进行理论分析, 而式(5.2.18)便于应用时进行具体计算。

上述将方程降维的方法称为李雅普诺夫-施密特约化。

5.2.3 约化函数导数的计算

虽然约化方程(5.2.10)或(5.2.18)的维数较低, 但在一般情形下求解仍有困难。通常只能采用逐次逼近法或摄动法求近似解。约化方程依赖于方程(5.2.7)的解, 有时并不能以显式写出。所以, 通过分岔分析确定解的定性性态是主要的研究途径。为此需要计算约化函数(5.2.17)的导数。借助隐函数和复合函数的求导公式, 不需要约化函数的显式即可确定其导数。

先定义方程(5.2.1)右端函数的 $i (i \geq 1)$ 阶微分:

$$D^i f(x, \mu)(v_1, v_2, \dots, v_i) = \frac{\partial}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial}{\partial t_i} f\left(x + \sum_{j=1}^i t_j v_j, \mu\right) \Big|_{t_1 = \dots = t_i = 0} \quad (5.2.19)$$

其中 $v_i \in \mathbb{R}^n (i \geq 1)$ 。根据复合函数求导法, 由式(5.2.15)计算 $g(y, \mu)$ 对 $y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ 和 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m$ 的各阶偏导数如 $\partial g / \partial y_i, \partial^2 g / \partial y_i \partial y_j, \partial^3 g / \partial y_i \partial y_j \partial y_l, \partial g / \partial \mu_s$ 和 $\partial^2 g / \partial y_i \partial \mu_s (i, j, l = 1, 2, \dots, k; s = 1, 2, \dots, m)$ 等, 其中需要计算的 $\psi(u, \mu)$ 的偏导数 $\partial \psi / \partial y_i, \partial^2 \psi / \partial y_i \partial y_j$ 和 $\partial \psi / \partial \mu_s$ 可以由式(5.2.7), 利用隐函数求导法得到。将 $g(y, \mu)$

的各阶偏导数代入式(5.2.17),得到在 $(y, \mu) = (0, 0)$ 处计算的约化函数 $g_l(y, \mu)$ 的各阶偏导数:

$$\frac{\partial g_l}{\partial y_i} = 0 \quad (5.2.20)$$

$$\frac{\partial^2 g_l}{\partial y_i \partial y_j} = \langle j_l, D^2 f(v_i, v_j) \rangle \quad (5.2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 g_l}{\partial y_i \partial y_j \partial y_r} = & \left\langle j_l, D^3 f(v_i, v_j, v_r) - D^2 f[v_i, A^{-1} P D^2 f(v_j, v_r)] - \right. \\ & \left. D^2 f[v_j, A^{-1} P D^2 f(v_i, v_r)] - D^2 f[v_r, A^{-1} P D^2 f(v_i, v_j)] \right\rangle \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

$$\frac{\partial g_l}{\partial \mu_s} = \left\langle j_l, \frac{\partial f}{\partial \mu_s} \right\rangle \quad (5.2.23)$$

$$\frac{\partial^2 g_l}{\partial y_i \partial \mu_s} = \left\langle j_l, D \frac{\partial f}{\partial \mu_s}(v_i) - D^2 f\left(v_i, A^{-1} P \frac{\partial f}{\partial \mu_s}\right) \right\rangle \quad (5.2.24)$$

其中 A^{-1} 为限制在 M_1 上矩阵 A 的逆, $f(x, \mu)$ 的偏导数均是在 $(x, \mu) = (0, 0)$ 处计算。具体推导过程从略,可参阅文献[31]第31~34页。

对于以下两种特殊情形,上述公式可以简化。若 f 为 x 的奇函数,即 $f(-x, \mu) = -f(x, \mu)$,则在 $(x, \mu) = (0, \mu)$ 处有 $\partial f / \partial \mu_s = 0$ 和 $D^2 f = 0$,此时式(5.2.21)~(5.2.24)可简化为

$$\frac{\partial^2 g_l}{\partial y_i \partial y_j} = 0 \quad (5.2.25)$$

$$\frac{\partial^3 g_l}{\partial y_i \partial y_j \partial y_r} = \langle j_l, D^3 f(v_i, v_j, v_r) \rangle \quad (5.2.26)$$

$$\frac{\partial g_l}{\partial \mu_s} = 0 \quad (5.2.27)$$

$$\frac{\partial^2 g_l}{\partial y_i \partial \mu_s} = \left\langle j_l, D \frac{\partial f}{\partial \mu_s}(v_i) \right\rangle \quad (5.2.28)$$

若对任意 μ 有 $f(0, \mu) = 0$,则在 $(x, \mu) = (0, \mu)$ 处有 $\partial F / \partial \mu_s = 0$,此时式(5.2.23)和(5.2.24)简化为式(5.2.27)和(5.2.28)。

5.2.4 稳定性与LS约化

利用LS约化方法得到的约化方程可以研究平衡点的稳定性。这里

仅讨论雅可比矩阵 A 只有一个本征值为零而其它本征值实部为负的情形,即约化方程(5.2.18)的维数 $k=1$ 。适当选择 $\text{Ker } A$ 和 M_2 的基向量 i_1 和 j_1 ,使得 $\langle i_1, j_1 \rangle > 0$ 。可以证明:设 $(x, \mu) = (0, 0)$ 为方程(5.1.1)的静态分岔点,在其邻域内约化方程(5.2.18)的某个解 $(y(\mu), \mu)$ ($y \in \mathbb{R}$) 对应方程(5.1.1)的解 $(x(\mu), \mu)$, 则当 $\partial g_1 / \partial y(y(\mu), \mu) < 0$ 时, $(x(\mu), \mu)$ 为渐近稳定;当 $\partial g_1 / \partial y(y(\mu), \mu) > 0$ 时, $(x(\mu), \mu)$ 为不稳定(参阅文献[31]第35~42页)。

例 5.2-1 研究平面系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu x_1 + x_2 - x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

的静态分岔。

解: 令

$$f(x, \mu) = (\mu x_1 + x_2 - x_1^2, -x_2 - x_1^2)^T \quad (\text{b})$$

其雅可比矩阵为

$$D_x f(x, \mu) = \begin{bmatrix} \mu - 2x_1 & 1 \\ -2x_1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{c})$$

系统(a)存在唯一奇异点 $(x, \mu) = (0, 0)$ 。在该奇异点邻域用 LS 方法建立约化方程。设

$$A = D_x f(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{d})$$

则 A 有本征值 0 和 -1。相应地

$$\text{Ker } A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\} \quad (\text{e})$$

$$\text{range } A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\} \quad (\text{f})$$

分别为 x_1 和 x_2 轴,两者正交。故可以取 $M_1 = \text{range } A$ 和 $M_2 = \text{Ker } A$ 。令 $e_1 = (1, 0)$ 和 $e_2 = (0, 1)$ 分别为 $\text{Ker } A$ 和 $\text{range } A$ 的单位向量,则任意 $x \in \mathbb{R}^2$ 可写为

$$x = u + v \quad (\text{g})$$

其中 $u = x_1 e_1 \in \text{Ker } A$ 和 $v = x_2 e_2 \in \text{range } A$ 。从 \mathbb{R}^2 到 $\text{range } A$ 的正交投影 P 为对任意 $z \in \mathbb{R}^2$,

$$Pz = \langle e_2, z \rangle e_2 \quad (\text{h})$$

在 $\text{range } A$ 上投影方程(5.2.4), 写为

$$\langle e_2, f(x, \mu) \rangle = -x_2 - x_1^2 = 0 \quad (i)$$

即

$$x_2 = -x_1^2 \quad (j)$$

由此得到

$$v = x_2 e_2 = -x_1^2 e_2 \quad (k)$$

将式(k)代入式(g), 再将结果代入式(b), 注意到 $M_2 = \text{Ker } A$, 取 $i = j = e_1$, 约化函数(5.2.17)为

$$g(x_1, \mu) = \langle e_1, f(x_1 e_2 - x_1^2 e_2, \mu) \rangle = \mu x_1 - 2x_1^2 \quad (l)$$

得到一维约化方程:

$$\mu x_1 - 2x_1^2 = 0 \quad (m)$$

约化方程(m)有两个解:

$$x_1^{(1)} = 0, \quad x_1^{(2)} = \frac{\mu}{2} \quad (n)$$

相应地系统(a)的平衡点为

$$x^{(1)}(\mu) = (0, 0)^T, \quad x^{(2)}(\mu) = \left(\frac{\mu}{2}, -\frac{\mu^2}{4} \right)^T \quad (o)$$

这里 $\langle i, j \rangle = 1 > 0$, 由式(l), 得到

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \mu - 4x_1 \quad (p)$$

根据前述结果, $x^{(1)}(\mu)$ 当 $\mu < 0$ 时渐近稳定, 当 $\mu > 0$ 时不稳定; $x^{(2)}(\mu)$ 当 $\mu < 0$ 时不稳定, 当 $\mu > 0$ 时渐近稳定。因此平衡点 $(x, \mu) = (0, 0)$ 为系统(a)的跨临界分岔点。

在本例中, 矩阵 A 的本征向量恰与坐标轴平行, 因此直和分解特别简单。此时, LS 约化即是系统的静态方程联立消去与本征值 0 的本征向量平行的坐标分量。此外, 在本例中式(i)可以显式解出, 而通常投影方程的求解需利用幂级数展开等近似处理方法。

§ 5.3 中心流形方法

5.3.1 中心流形方法概述

中心流形方法是非线性系统理论的重要内容。中心流形是线性系统

的中心子空间概念在非线性系统中的推广。在高维非线性系统非双曲平衡点的邻域内,存在一类维数较低的局部不变流形,当系统的相轨迹在此流形上时可能存在分岔,而在该流形之外,动力学行为非常简单,例如以指数方式被吸引到该流形。这类流形称为中心流形。中心流形定理的一个特例由普利斯(V. Pliss)于1964年证明,一般有限维系统的情形由凯利(A. Kelley)于1967年证明。该定理还可以推广到若干无穷维系统。

研究分岔问题时,中心流形定理提供了一种高维系统的降维方法。该方法将复杂的渐近行为分离出来,可以在维数较低的中心流形上进行研究。高维系统的分岔特性可以由系统在相应的中心流形上的动力学行为来确定。

5.3.2 线性系统平衡点的不变子空间

设线性系统

$$\dot{x} = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (5.3.1)$$

中 $n \times n$ 矩阵 A 有 n_s 个本征值具有负实部, n_c 个本征值具有零实部, n_u 个本征值具有正实部,其中 l 重本征值按 l 个本征值考虑,则 $n_s + n_c + n_u = n$ 。分别以 $v_i (i=1, 2, \dots, n_s)$, $u_j (j=1, 2, \dots, n_c)$ 和 $w_k (k=1, 2, \dots, n_u)$ 表示矩阵 A 的具有负实部、零实部和正实部的本征值所对应的线性无关本征向量,其中复共轭本征值对应的复共轭本征向量分别用其实部和虚部代替,对于重本征值采用广义本征向量。这些向量分别张成 \mathbb{R}^n 的 n_s 维、 n_c 维和 n_u 维子空间:

$$E^s = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_{n_s}\} \quad (5.3.2)$$

$$E^c = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_{n_c}\} \quad (5.3.3)$$

$$E^u = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_{n_u}\} \quad (5.3.4)$$

子空间 E^s, E^c 和 E^u 构成 \mathbb{R}^n 的直和分解:

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u \quad (5.3.5)$$

根据微分方程(5.3.1)解的特点并利用线性代数知识,可以证明解在子空间 E^s, E^c 和 E^u 中都是不变的,即这些子空间中的初始值所对应的解仍在同一子空间。子空间 E^s, E^c 和 E^u 分别称为稳定子空间、中心子空间和不稳定子空间,合称为线性系统(5.3.1)的不变子空间。在每个不变子空间中,任意一点出发的相轨迹始终在该子空间中。进一步可以证明,在稳定子空间 E^s 上的相轨迹随着时间增加单调地或振荡地按指数

规律趋于平衡点,在中心子空间 E^c 上的相轨迹随着时间增加保持有界(单重零本征值)或按幂规律远离平衡点(多重零本征值),在不稳定子空间 E^u 上的相轨迹随着时间增加单调地或振荡地按指数规律远离平衡点。

例 5.3-1 分别确定下列矩阵:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

给出的线性系统的不变子空间。

解: 矩阵 A_1 的本征值分别为 $-1, 0$ 和 2 , 对应的本征向量分别为 $(1, -1, 0)^T, (0, 0, 1)^T$ 和 $(2, 1, 0)^T$, 则有

$$\left. \begin{aligned} E^s &= \text{span}\{(1, -1, 0)^T\} \\ E^c &= \text{span}\{(0, 0, 1)^T\} \\ E^u &= \text{span}\{(2, 1, 0)^T\} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

如图 5.11a 所示。矩阵 A_2 的本征值分别为 $-1+i, -1-i$ 和 2 , 相应的本征向量分别为 $(1, 0, 0)^T - i(0, 1, 0)^T, (1, 0, 0)^T + i(0, 1, 0)^T$ 和 $(0, 0, 1)^T$, 则有

$$E^s = \text{span}\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T\}, \quad E^c = \emptyset, \quad E^u = \text{span}\{(0, 0, 1)^T\} \quad (b)$$

如图 5.11b 所示。

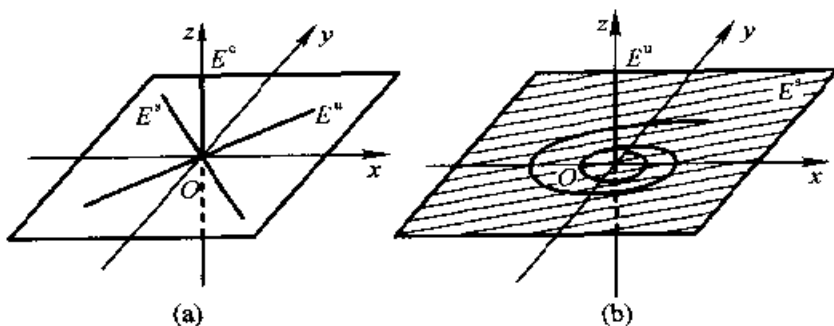


图 5.11 线性系统的不变子空间

线性系统平衡点不变子空间的概念可以推广到非线性系统,即后面将要讨论的非线性系统的不变流形。由于非线性情形较为复杂,双曲平衡点和非双曲平衡点必须分别处理。双曲平衡点的不变流形虽然与分

岔问题的约化无关,但在 § 6.4 探讨混沌出现的机制中起着重要作用。非双曲平衡点的中心流形是分岔问题约化的基础。

5.3.3 非线性系统双曲平衡点的稳定流形和不稳定流形

平衡点的不变流形是线性系统的不变子空间概念在非线性系统中的推广。平衡点的不变流形是系统相空间中一类特殊的曲线或曲面,在其上出发的相轨迹中随着时间增加而渐近地趋近或远离平衡点。随着时间增加而渐近地趋于平衡点的不变流形称为稳定流形。随着时间增加而渐近地远离平衡点的不变流形称为不稳定流形。

流形特别是微分流形是现代微分几何和拓扑中的基本概念,是曲线和曲面概念的推广。流形是拓扑空间中的一类点集,其中每个点的小邻域可与欧几里德(Euclid)空间中的开集建立可逆连续映射。若这种映射还具有 m 阶连续微分,则点集称为 C^m 流形。若 $m \geq 1$, C^m 流形称为微分流形。在本书中可以将流形简单地理解为曲线或曲面,而将微分流形理解为光滑的曲线或曲面。前面讨论非线性系统时,都将其相空间定义为欧几里德空间中的开集,在更一般的情形,非线性系统的相空间可以是微分流形。

为了对稳定流形和不稳定流形有一个直观的概念,先考察一个具体的例子。

例 5.3-2 确定非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y + x^2 \\ \dot{z} = z + x^2 \end{cases} \quad (a)$$

的稳定流形和不稳定流形。

解: 非线性系统(a)仅有平衡点 $O(0,0,0)$,由于在点 O 处的雅可比矩阵

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b)$$

无实部为零的本征值,故 O 为双曲平衡点。从方程组(a)的第一个线性微分方程可以解出 $x(t)$,代入式(a)的后两个方程,得到解耦的线性非齐次微分方程,可分别求解。若给定 $t=0$ 时的初值为

$$(x(0), y(0), z(0)) = (X, Y, Z) \quad (c)$$

得到方程的解:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Xe^{-t} \\ Ye^{-t} + X^2(e^{-t} - e^{-2t}) \\ Ze^t + X^2(e^t - e^{-2t})/3 \end{bmatrix} \quad (d)$$

注意到在曲面 $Z + X^2/3 = 0$ 上的初值使得解 $x(t)$ 有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, 因此曲面

$$W^s(O) = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid Z + X^2/3 = 0\} \quad (e)$$

称为平衡点 O 的稳定流形。而在曲线 $X = Y = 0$ 上的初值使得解 $x(t)$ 有 $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$, 因此曲线

$$W^u(O) = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X = Y = 0\} \quad (f)$$

称为平衡点 O 的不稳定流形。稳定流形和不稳定流形如图 5.12 所示。

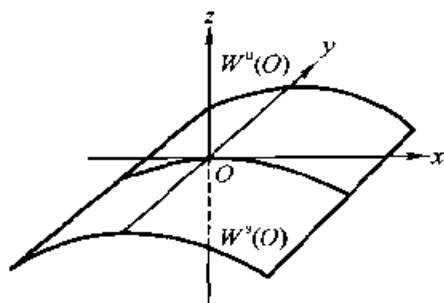


图 5.12 稳定流形和不稳定流形

为精确定义不变流形, 先给出局部稳定流形和不稳定流形的定义。设非线性系统

$$\dot{x} = f(x) \quad (5.3.6)$$

有平衡点 x_0 , U 是 x_0 在相空间中的某个邻域, 方程(5.3.6)的以 X 为初值的解记为 $x(t, X)$ 。点集

$$\begin{aligned} W_{loc}^s(x_0) = \{X \in U \mid \text{对一切 } t \geq 0 \text{ 有 } x(t, X) \in U, \\ \text{且当 } t \rightarrow +\infty \text{ 时 } x(t, X) \rightarrow x_0\} \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

$$\begin{aligned} W_{loc}^u(x_0) = \{X \in U \mid \text{对一切 } t \leq 0 \text{ 有 } x(t, X) \in U, \\ \text{且当 } t \rightarrow -\infty \text{ 时 } x(t, X) \rightarrow x_0\} \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

分别称为平衡点 x_0 的局部稳定流形和局部不稳定流形。将局部稳定流形 $W_{loc}^s(x_0)$ 中的点在相轨迹上沿时间负向运动, 得到的点集 $W^s(x_0)$ 称为平衡点 x_0 的全局稳定流形, 简称稳定流形。将局部不稳定流形

$W_{loc}^u(x_0)$ 中的点在相轨迹上沿时间正向运动,得到的点集 $W^u(x_0)$ 称为平衡点 x_0 的全局不稳定流形,简称不稳定流形。若一流形使得某微分方程初值在该流形内的解始终保持在该流形内,则称为该微分方程的不变流形。稳定流形和不稳定流形都是不变流形。

稳定流形与不稳定流形的相交情况对于分析非线性系统的全局复杂行为至关重要。根据稳定和不变流形的定义和微分方程解的唯一性不难证明:

- (1) 稳定流形和不稳定流形均不能自身相交;
- (2) 不同平衡点的稳定流形不能相交,不稳定流形也不能相交;
- (3) 若 $x \neq x_0$, 且 $x \in W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$, 则 $W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$ 包含无穷多个点;
- (4) 若 x_1 和 x_2 是不同的平衡点, 存在 $x \neq x_1$ 且 $x \neq x_2$ 使得 $x \in W^s(x_1) \cap W^u(x_2)$, 则 $W^s(x_1) \cap W^u(x_2)$ 包含无穷多个点。

上述结论(3)表明平衡点的稳定流形 $W^s(x_0)$ 和 $W^u(x_0)$ 不稳定流形若有一个交点,则 $W^s(x_0)$ 和 $W^u(x_0)$ 有无穷多个交点。由(3)和(4)知同一个或不同的平衡点的稳定流形和不稳定流形相交可能产生复杂的相轨迹,在第六章中将继续讨论。

阿达玛(J.S.Hadamard)在1901年和珀伦(O.Perron)在1928年分别用不同的方法证明了非线性系统双曲平衡点不变流形的存在性,以及与其线性近似系统的不变子空间的关系,即下述双曲平衡点的不变流形定理:

双曲平衡点的不变流形定理: 设 x_0 是非线性系统(5.3.6)的双曲平衡点,系统(5.3.6)在 x_0 的线性近似系统(5.3.1)中有 n_s 维稳定子空间 E^s 和 n_u 维不稳定子空间 E^u , 且 $n_s + n_u = n$ 。则系统存在 n_s 维局部稳定流形 $W_{loc}^s(x_0)$ 和 n_u 维局部不稳定流形 $W_{loc}^u(x_0)$, 使得 $W_{loc}^s(x_0)$ 和 E^s , $W_{loc}^u(x_0)$ 和 E^u 在 x_0 分别相切。且若 f 具有 m 阶连续导数, 则 $W_{loc}^s(x_0)$ 和 $W_{loc}^u(x_0)$ 均为 C^m 微分流形。

这一定理证明较复杂,可参阅文献[21]第102~108页或文献[25]第56~59页,此处从略。 $n_s = n_u = 1$ 的情形如图5.13a所示, $n_s = 2, n_u = 1$ 的情形如图5.13b所示。

非线性系统(5.3.6)的解 $x(t, X)$ 在不变流形上平衡点邻域内的行为具有以下性质: 设 $D_x f(x_0)$ 的本征值负实部均小于 $-\alpha$, 正实部均大于

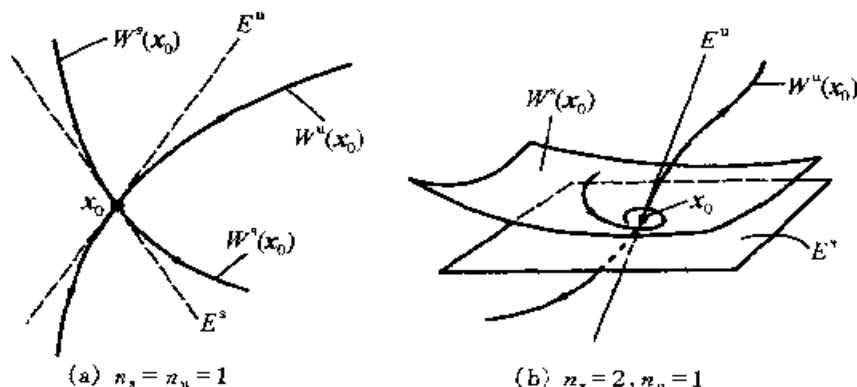


图 5.13 不变流形定理图示

β , 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 x_0 的一个邻域 U , 使得当 $t \geq 0$ 时对任意 $x \in U \cap W_{\text{loc}}^s(x_0)$, 有

$$\|x(t, X)\| \leq \varepsilon e^{-\alpha t} \quad (5.3.9)$$

而当 $t \leq 0$ 时对任意 $x \in U \cap W_{\text{loc}}^u(x_0)$, 有

$$\|x(t, X)\| \leq \varepsilon e^{-\beta t} \quad (5.3.10)$$

例 5.3-3 利用例 5.3-2 中的非线性系统验证不变流形定理。

解: 例 5.3-2 中非线性系统(a)的线性近似系统的系数矩阵 J 由式(b)给出, 具有二重本征值 -1 和本征值 1 。对应于本征值 -1 的广义本征向量为 $(1, 0, 0)^T$ 和 $(0, 1, 0)^T$, 对应于本征值 1 的本征向量为 $(0, 0, 1)^T$, 则有

$$\begin{aligned} E^s &= \text{span}\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T\}, & E^c &= \emptyset, \\ E^u &= \text{span}\{(0, 0, 1)^T\} \end{aligned} \quad (a)$$

$W_{\text{loc}}^s(0)$ 和 E^s 在零点 0 处相切, 而 $W_{\text{loc}}^u(0)$ 与 E^u 重合, 如图 5.12 所示。

5.3.4 中心流形定理及其约化原理

双曲平衡点的不变流形定理表明在双曲平衡点的邻域内只存在稳定流形和不稳定流形。在非双曲平衡点的邻域内, 除稳定流形和不稳定流形外, 还存在另一类局部不变流形。这种与线性近似系统的中心子空间相切的局部不变流形称为局部中心流形。所谓局部不变流形, 是指初值在该流形内的解在有限时间间隔内始终保持在该流形内。局部稳定流形和局部不稳定流形都是局部不变流形的例子。在不会引起混淆时, 局部稳定流形、局部中心流形和局部不稳定流形也简称为稳定流形、中心流形

和不稳定流形。应用泛函分析的知识可以证明下述平衡点的局部不变流形定理,也称为**中心流形定理**,具体证明过程参阅文献[19]第267~276页、[20]第16~19页或文献[21]第316~318页,此处从略。

中心流形定理: 设 $x = x_0$ 为 n 维非线性系统(5.3.6)的平衡点,其中 f 为具有 r 阶连续导数的矢量函数。将系统(5.3.6)在 x_0 处的线性近似系统的稳定子空间、中心子空间和不稳定子空间分别记作 E^s, E^c 和 E^u , 其维数分别为 n_s, n_c 和 n_u 。则唯一存在 n_s 维稳定流形 $W^s(x_0)$ 和 n_u 维不稳定流形 $W^u(x_0)$, 存在 n_c 维中心流形使得 $W^s(x_0)$ 和 E^s 、 $W^c(x_0)$ 和 E^c 、以及 $W^u(x_0)$ 和 E^u 在 x_0 处分别相切。 $W^s(x_0), W^c(x_0)$ 和 $W^u(x_0)$ 均为 C^r 微分流形。

注意到上述定理仅保证中心流形的存在性,但中心流形可能是不唯一的,如下例所示。

例 5.3-4 确定系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

的中心流形。

解: 系统(a)的初始条件为 $(x(0), y(0)) = (X, Y)$ 时的解为

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{X}{1 - Xt}, Ye^{-t} \right) \quad (b)$$

消去时间 t 后得到

$$y(x) = (Ye^{-\frac{1}{X}})e^{\frac{1}{x}} \quad (c)$$

系统(a)在半平面 $x < 0$ 中的相轨迹当 $x \rightarrow 0$ 时都趋于原点,而在半平面 $x > 0$ 仅有 x 的正半轴当 $x \rightarrow 0$ 时趋于原点,半平面 $x < 0$ 中的任意相轨迹与正半轴构成系统(a)的中心流形,如图 5.14 所示。因此系统(a)存在无穷多个中心流形。

若 f 在 x_0 计算的雅可比矩阵 $D_x f(x_0)$ 存在实部为正的本征值,则系统(5.3.6)的平衡点 x_0 不稳定。在工程和其它应用问题中,更侧重研究 $D_x f(x_0)$ 不含实部为正的本征值的情形。此时 $W^u(x_0)$ 为空集。不失一般性设平衡点为原点,在原点的某个邻域 U 中,系统(5.3.6)通过非奇异

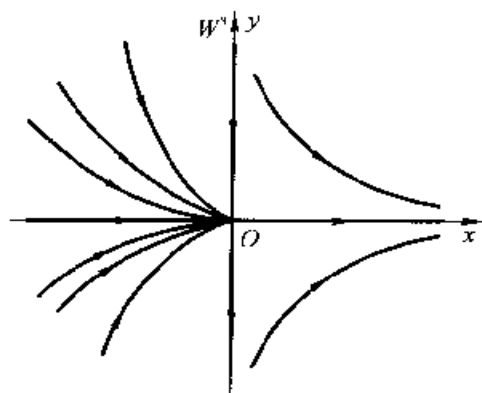


图 5.14 中心流形不唯一

的线性变换可写作

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= Au + G_1(u, v) \\ \dot{v} &= Bv + G_2(u, v) \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} u &\in \mathbb{R}^{n_c}, \quad v \in \mathbb{R}^{n_s} \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

其中 $n_c \times n_c$ 矩阵 A 和 $n_s \times n_s$ 矩阵 B 的本征值分别仅有零实部和负实部, $n_c + n_s = n$. 函数 G_1 和 G_2 及其一阶偏导数在原点处均为零。

根据中心流形定理, 中心流形 W^c 存在, 且在原点处与中心子空间 $v=0$ 相切, 故在邻域 U 内可将 W^c 表示为

$$v = h(u) \quad (5.3.12)$$

其中

$$h(0) = 0, \quad Dh(0) = 0 \quad (5.3.13)$$

如图 5.15 所示。将式(5.3.12)代入式(5.3.11), 得到

$$\dot{u} = Au + G_1(u, h(u)) \quad (5.3.14)$$

因此系统(5.3.14)称为原系统(5.3.11)的约化系统。可以证明, n_c 维系统(5.3.14)包含了 n 维系统(5.3.11)在原点邻域内渐近行为的信息。即有下述约化原理。

约化原理: 如果系统(5.3.14)的平衡点为稳定(渐近稳定、不稳定), 则系统(5.3.11)的平衡点为稳定(渐近稳定、不稳定)。

进一步还可以证明, 若系统(5.3.14)的平衡点为稳定, $(u(t), v(t))$ 为系统(5.2.11)的解, 其初值 $(u(0), v(0))$ 充分小, 则存在系统(5.3.14)的解 $u_0(t)$ 和常数 $\alpha > 0$, 使得

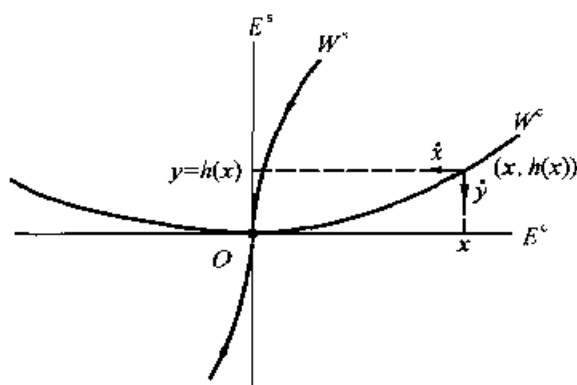


图 5.15 中心流形及其投影

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= u_0(t) + O(e^{-\alpha t}) \\ v(t) &= h(u_0(t)) + O(e^{-\alpha t}) \end{aligned} \right\} \quad (5.3.15)$$

上式表明,平衡点没有不稳定流形时,在平衡点的某个小邻域内,中心流形外的解随时间增加以指数方式趋于中心流形上的某个解。同理还可证明,平衡点没有稳定流形时,在平衡点的某个小邻域内,中心流形上的解随时间增加以指数方式趋于中心流形外的某个解。因此中心流形具有渐近性质。这些结论的证明可参阅文献[20]第19~25页或文献[21]第319~321页。

5.3.5 中心流形的确定

在具体应用中心流形方法进行约化降维时,必须首先确定中心流形。将式(5.3.12)代入式(5.3.11)的第二式中,得到

$$Dh(u)\dot{u} = Bh(u) + G_2(u, h(u)) \quad (5.3.16)$$

再以式(5.3.11)中第一式代入,整理后得到关于 $h(u)$ 的微分方程

$$Dh(u)(Au + G_1(u, h(u))) - Bh(u) - G_2(u, h(u)) = 0 \quad (5.3.17)$$

且有初值条件(5.3.13)。方程(5.3.17)一般不能精确求解,但可以利用待定系数法求得渐近级数解。通过例子说明精确或近似地确定中心流形的过程。

例 5.3-5 确定系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= -u^3 \\ \dot{v} &= -v \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

的中心流形。

解：对于系统(a),式(5.3.17)写为

$$h'(u)(-u^3) + h(u) = 0 \quad (b)$$

积分式(b),得到

$$h(u) = \begin{cases} Ce^{-1/2u^2} & u \neq 0 \\ 0 & u = 0 \end{cases} \quad (c)$$

其中 C 为任意常数。

例 5.3-6 确定系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= uv \\ \dot{v} &= -v + au^2 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

的中心流形,其中 a 为常数,并讨论系统(a)的稳定性。

解：对于系统(a),式(5.3.17)写为

$$h'(u)(-uh(u)) + h(u) - au^2 = 0 \quad (b)$$

初始条件(5.3.13)写为

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = 0 \quad (c)$$

方程(b)不能精确求解。根据式(c),可设 $h(u)$ 的渐近展开式为

$$h(u) = c_2 u^2 + c_3 u^3 + O(u^4) \quad (d)$$

将式(d)代入式(b),比较 u 的同次幂系数,得到 $c_2 = a$ 和 $c_3 = 0$,则有

$$h(u) = au^2 + O(u^4) \quad (e)$$

根据式(5.3.6),有约化系统:

$$\dot{u} = au^3 + O(u^5) \quad (f)$$

应用李雅普诺夫直接方法容易验证,当 $a < 0$ 时,式(f)的零解渐近稳定;当 $a = 0$ 时,式(f)的零解稳定;当 $a > 0$ 时,式(f)的零解不稳定。根据约化原理,原系统的零解当 $a < 0$ 时渐近稳定,当 $a = 0$ 时稳定,当 $a > 0$ 时不稳定。

例 5.3-7 确定系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + ax_1^2 + bx_1x_2 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

的中心流形和约化系统,其中 a 和 b 为常数。

解: 系统(a)尚不具有式(5.3.11)的形式, 为此先进行非奇异线性变换:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (b)$$

将式(b)代入式(a), 整理后得到

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= a(u+v)^2 - b(uv+v^2) \\ \dot{v} &= -v - a(u+v)^2 + b(uv+v^2) \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

对于系统(c), 式(5.3.17)写为

$$\begin{aligned} &h'(u)[a(u+h(u))^2 - b(uh(u) + h^2(u))] + \\ &h(u) + a(u+h(u))^2 - b(uh(u) + h^2(u)) = 0 \end{aligned} \quad (d)$$

初始条件(5.3.13)写为

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = 0 \quad (e)$$

方程(d)不能精确求解。根据式(e), 可设 $h(u)$ 的渐近展开式为

$$h(u) = c_2 u^2 + c_3 u^3 + O(u^4) \quad (f)$$

将式(f)代入式(d), 比较 u 的同次幂系数, 得到 $c_2 = -a$ 和 $c_3 = a(4a-b)$, 故

$$h(u) = -au^2 - a(4a-b)u^3 + O(u^4) \quad (g)$$

根据式(5.3.14), 得到约化系统:

$$\dot{u} = au^2 + a(b-2a)u^3 + a(9a^2-7ab+b^2)u^4 + O(u^5) \quad (h)$$

5.3.6 用中心流形方法研究分岔

在研究分岔问题时, 需要讨论含参数的系统(5.1.1)。设 $\mu=0$ 时, 系统(5.1.1)的零解为非双曲平衡点, 在该点的雅可比矩阵 $D_x f(0,0)$ 有 n_c 个本征值具有零实部, $n_s = n - n_c$ 个本征值具有负实部。若将 μ 作为变量处理, 经过非奇异线性变换可将式(5.1.1)化为

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= A(\mu)u + G_1(u, v, \mu) \\ \dot{v} &= B(\mu)v + G_2(u, v, \mu) \\ \dot{\mu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.3.18)$$

$$u \in \mathbb{R}^{n_c}, \quad v \in \mathbb{R}^{n_s}, \quad \mu \in \mathbb{R}^m$$

其中 $n_c \times n_c$ 矩阵 $A(\mu)$ 和 $n_s \times n_s$ 矩阵 $B(\mu)$ 在 $\mu=0$ 时分别有零实部和负实部的本征值, 函数 G_1 和 G_2 以及一阶偏导数在 $(0,0,0)$ 处均为零。

系统(5.3.18)称为系统(5.1.1)的扩张系统。 $(0, 0, 0)$ 为扩张系统(5.3.18)的非双曲平衡点,根据不变流形定理,存在 $n+m$ 维相空间 (u, v, μ) 中的 n_c+m 维中心流形,在极点处与线性近似系统的中心子空间 $v=0$ 相切。根据约化原理,可以根据中心流形上平衡点的分岔描述原系统(5.1.1)平衡点的分岔。

例 5.3-8 研究达芬系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -y + \mu x - ax^2 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

平衡点 $(0,0)$ 的分岔。

解: 系统(a)尚不具有式(5.3.18)的形式,为此先进行非奇异线性变换:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (b)$$

将式(b)代入式(a),整理后写为扩张系统的形式,得到

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= \mu(u+v) - (u+v)^2 \\ \dot{v} &= -\mu(u+v) - v + (u+v)^2 \\ \dot{\mu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

对于系统(c),中心流形由函数 $v=h(u, \mu)$ 表示,相应地将式(5.3.17)写为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial \mu} \right) (\mu(u+h(u)) - (u+h(u))^2, 0)^T + \\ & \mu(u+h(u)) + h(u) - (u+h(u))^2 = 0 \end{aligned} \quad (d)$$

即

$$[\mu(u+h(u)) - (u+h(u))^2] \left(\frac{\partial h}{\partial u} + 1 \right) + h(u) = 0 \quad (e)$$

初始条件(5.3.13)写为

$$h(0,0) = 0, \quad \frac{\partial h(0,0)}{\partial u} = \frac{\partial h(0,0)}{\partial \mu} = 0 \quad (f)$$

方程(e)不能精确求解。根据式(f),可设 $h(u, \mu)$ 的渐近展开式为

$$h(u, \mu) = c_2 u^2 + c_3 u\mu + c_4 \mu^2 + O(3) \quad (g)$$

其中 $O(3)$ 表示 $u^3, u^2\mu, u\mu^2$ 和 μ^3 以及更高次的项。将式(g)代入式(e),比较 u 的同次幂系数,得到 $c_2=1, c_3=-1$ 和 $c_4=0$,则有

$$h(u, \mu) = -\mu u + u^2 + O(3) \quad (h)$$

根据式(5.3.14),得到约化系统:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\mu u + u^2 + O(3) \\ \dot{\mu} &= 0\end{aligned}\quad (i)$$

根据式(i)判断,约化系统在 $\mu=0$ 处出现跨临界分岔,并由此推知原系统(a)在 $\mu=0$ 时出现跨临界分岔。

§ 5.4 庞加莱-伯克霍夫范式

5.4.1 庞加莱-伯克霍夫范式理论概述

分岔理论的另一重要问题是降维以后所得到系统的简化,在保持分岔特性的前提下尽可能转化为较为简单和规范的形式。在分岔理论中系统的简化主要有两种方法,即庞加莱-伯克霍夫范式和奇异性理论。

研究微分方程的一种有效方法是借助坐标变换将其化为尽可能简单的形式,即从方程右端函数的幂级数展开式中消去尽可能多的高阶项。庞加莱-伯克霍夫范式(简称 PB 范式)理论可以在平衡点邻域通过非线性的坐标变换将微分方程化简为某种规范形式,其中非线性坐标变换可由一系列线性方程确定。这种规范形式虽然可能与原来的微分方程不完全等价,但可以提供定性性态方面的重要信息。PB 范式不仅是微分方程定性研究的工具,而且在分析含参数系统时成为分岔研究的基本方法。1879 年庞加莱在博士学位论文中提出了 PB 范式的基本思想,证明了当一次近似系统满足特定条件时,非线性系统可以通过坐标变换化为线性系统。1912 年杜拉克(H. Dulac)对于平面系统改进了庞加莱的结果。1927 年伯克霍夫(G. D. Birkhoff)对范式理论的发展作出重要贡献。现在 PB 范式仍是一个活跃的研究领域。PB 范式是一种局部的方法,因为坐标变换只是在已知解的邻域中进行。这里仅叙述非线性系统平衡点邻域的 PB 范式。

5.4.2 PB 范式定理

在正式讨论 PB 范式定理以前,先通过一个特殊例子说明该定理的结论和证明思路。

例 5.4-1 对于一维非线性微分方程

$$\dot{x} = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \quad (c_1 \neq 0) \quad (a)$$

在 $x=0$ 的邻域内,适当选择 a_2, a_3, \cdots 待定系数,通过变换

$$x = y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \cdots \quad (b)$$

将式(a)化为尽可能简单的形式。

解: 将式(b)代入式(a),得到

$$\begin{aligned} \dot{y}(1 + 2a_2 y + 3a_3 y^2 + \cdots) \\ = c_1 y + (c_1 a_2 + c_2) y^2 + (c_1 a_3 + c_2 a_2 + c_3) y^3 + \cdots \end{aligned} \quad (c)$$

将上式两边同除 \dot{y} 的系数,得到

$$\dot{y} = c_1 y + (c_2 - c_1 a_2) y^2 + (c_3 + 2c_1 a_2^2 - 2c_1 a_2) y^3 + \cdots \quad (d)$$

为消去式(d)中的 y^2 和 y^3 项,令

$$a_2 = \frac{c_2}{c_1}, \quad a_3 = \frac{a_2^2}{c_1^2} + \frac{c_3}{2c_1} \quad (e)$$

得到式(a)在 $x=0$ 即 $y=0$ 邻域内的简化形式

$$\dot{y} = c_1 y + o(y^3) \quad (f)$$

适当选择变换(b)中的高次项系数,还可消去式(a)中更高次的项。

在一般情形,研究微分方程(5.3.6)。设 f 足够光滑, $x=0$ 为方程(5.3.6)的平衡点。对于某个给定的正整数 $r \geq 2$,通过坐标变换使得微分方程(5.3.6)右端函数 f 的幂级数展开式直到 r 次的项有比较简单的形式。这一化简过程由低次项到高次项逐步实现。以下仅叙述其中的一个步骤,其它步骤也完全类似。

记 $H_n^l (l=2,3,\cdots,r)$ 为从 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R}^n 的所有 l 次齐次多项式构成的线性空间。在 $x=0$ 处的雅可比矩阵为 $A = D_x(0)$ 。设 $f(x)$ 的展开式中直到 $k-1$ 次的项已经化简,写为

$$f(x) = Ax + g_2(x) + \cdots + g_{k-1}(x) + h_k(x) + o(\|x\|^k) \quad (5.4.1)$$

其中 $g_i \in H_n^i (i=2,3,\cdots,k-1)$ 为已经化简的项, $h_k \in H_n^k$ 。现需要构造坐标变换,使 $h_k(x)$ 得到简化而保证次数低于 k 的项不变,为此设

$$x = y + P_k(y) \quad (5.4.2)$$

其中 $P_k \in H_n^k$ 为待定函数。将式(5.4.2)代入方程(5.3.6),得到

$$\dot{y} = (I + DP_k(y))^{-1} f(y + P_k(y)) \quad (5.4.3)$$

在平衡点 $x=0$ 的小邻域内,有

$$(I + DP_k(y))^{-1} = I - DP_k(y) + o(\|y\|^k) \quad (5.4.4)$$

根据式(5.4.1)和(5.4.4),可将式(5.4.3)化为

$$\begin{aligned} \dot{y} = & Ay + g_2(y) + \cdots + g_{k-1}(y) + h_k(y) - \\ & [DP_k(y)Ay - AP_k(y)] + o(\|y\|^k) \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

对于函数 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 定义算子 L_A 为

$$L_A F(y) = DF(y)Ay - AF(y) \quad (5.4.6)$$

利用式(5.4.6),将方程(5.4.5)写为

$$\dot{y} = Ay + g_2(y) + \cdots + g_{k-1}(y) + h_k(y) - L_A P_k(y) + o(\|y\|^k) \quad (5.4.7)$$

注意到 L_A 作用于 H_n^k 的值域 $L_A(H_n^k)$ 包含于 H_n^k , 取 $L_A(H_n^k)$ 在 H_n^k 中的补空间为 G_n^k , 即有直和:

$$H_n^k = L_A(H_n^k) \oplus G_n^k \quad (5.4.8)$$

则对任意 $h_k \in H_n^k$, 存在 $f_k \in L_A(H_n^k)$ 和 $g_k \in G_n^k$, 使得

$$h_k(y) = f_k(y) + g_k(y) \quad (5.4.9)$$

由于 $f_k \in L_A(H_n^k)$, 存在 $P_k \in H_n^k$ 使得 $L_A P_k(y) = f_k(y)$, 则方程(5.4.7)化简为

$$\dot{y} = Ay + g_2(y) + \cdots + g_{k-1}(y) + g_k(y) + o(\|y\|^k) \quad (5.4.10)$$

其中 $g_k \in G_n^k$ 。这个过程对于 $2 \leq k \leq r$ 均成立, 因此可以通过一系列坐标变换使得 $g_l \in G_n^l$ ($l=2, 3, \cdots, r$)。从而证明了下述定理。

庞加莱-伯克霍夫范式定理: 设零点 0 为非线性系统(5.3.5)的平衡点, f 具有 r ($r \geq 2$) 阶连续导数, 则在零点邻域存在坐标的 r 次多项式变换, 使得在新坐标中, 方程(5.3.6)简化为规范形式:

$$\dot{y} = Ay + g_2(y) + \cdots + g_r(y) + o(\|y\|^r) \quad (5.4.11)$$

其中 $g_l \in G_n^l$ ($l=2, 3, \cdots, r$), G_n^l 为 $L_A(H_n^l)$ 在 l 次齐次多项式构成的线性空间 H_n^l 中的补空间。

PB 范式定理及其证明过程中的非线性坐标变换是由一系列线性方程

$$[DP_k(y)Ay - AP_k(y)] = f_k(y) \quad (5.4.12)$$

的解构造的。在简化 k 阶项时, 不影响低于 k 阶的项, 但可使高于 k 阶

的项发生变化。式(5.4.11)中的非线性项称为共振项,是完全由方程(5.4.5)的线性部分即矩阵 A 确定的。由于补空间 G_n' 的基有多种选择,可以对应不同的 PB 范式,故 PB 范式不是唯一的。此外,由于坐标变换是在平衡点的小邻域进行的,因此 PB 范式定理是局部性的结论。

截断高次项后,系统

$$\dot{y} = Ay + g_2(y) + \cdots + g_r(y) \quad (5.4.13)$$

称为方程(5.4.5)的一个 r 阶庞加莱-伯克霍夫范式。PB 范式与通常的泰勒展开式相比,简化之处在于通常幂级数展开式中各高次项为同次齐次多项式所张成线性空间中的元素,而 PB 范式中各高次项为这些线性空间中的一个子空间中的元素,从而使问题简化。在一些特殊情形,这种子空间可能退化为空集,则相应的 PB 范式成为线性系统。

应该指出,对于给定的 r , r 阶 PB 范式与原来的系统的拓扑结构有密切关系,但未必完全相同; r 阶 PB 范式能在多大程度上充分反映原来系统的定性性态仍是个没有解决的问题。即使函数 f 有收敛的幂级数展开式,方程(5.4.11)右端当 $r \rightarrow \infty$ 时也可能不收敛。此外,由于补空间有不同的选取方法, PB 范式可能有不同的形式,即 PB 范式不是唯一的。尽管存在上述问题,大量研究表明,阶数不太高的 PB 范式已能给出定性研究所需要的基本信息。

5.4.3 矩阵本征值共振与 PB 范式中的共振项

在分岔理论中,重点考虑具有零实部本征值的平衡点。对于这类平衡点,不可能通过坐标变换进行线性化,则 PB 范式中必有共振项存在。为确定式(5.4.11)中不为零的共振项,需引入矩阵本征值共振的概念。

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为矩阵 A 的本征值,若存在满足 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n \geq 2$ 的非负整数组 m_1, m_2, \cdots, m_n 和正整数 $s (1 \leq s \leq n)$ 使得

$$\lambda_s = m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \cdots + m_n \lambda_n \quad (5.4.14)$$

则称矩阵 A 为本征值共振, $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 称为共振的阶。例如,满足 $\lambda_1 = 4\lambda_2$ 的本征值是四阶共振;满足 $\lambda_1 = -\lambda_2$ 的本征值为奇数阶共振,因为对任意正整数 m 有 $\lambda_1 = (m+1)\lambda_1 + m\lambda_2$;而 $2\lambda_1 = 3\lambda_2$ 不是共振的。

若式(5.4.11)中的共振项为零,则对于给定的 $f_k \in H_n^k$, 式(5.4.12)

存在解 $\mathbf{h}_k \in H_n^k$ 。为突出问题的本质,考虑 A 是具有不同实本征值的对角矩阵, $\mathbf{e}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为本征值 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ 对应的本征向量, 则 \mathbf{e}_i 构成 \mathbb{R}^n 的一组基向量, 以 \mathbf{e}_i 为基的坐标记为 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, 则 $y^k = y_1^{m_1} y_2^{m_2} \dots y_n^{m_n} (k = m_1 + m_2 + \dots + m_n)$ 是空间 H_n^k 的元素任一分量的最简形式。取 $\mathbf{h}_k(\mathbf{y}) = y^k \mathbf{e}_s, D\mathbf{h}_k(\mathbf{y})A\mathbf{y}$ 是 A 的第 s 个对应于本征值 λ_s 的本征向量。仅有第 s 个分量不为零,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^k}{\partial \mathbf{y}} A\mathbf{y} &= \begin{bmatrix} m_1 y_1^{m_1-1} y_2^{m_2} \dots y_n^{m_n} \\ m_2 y_1^{m_1} y_2^{m_2-1} \dots y_n^{m_n} \\ \vdots \\ m_n y_1^{m_1} y_2^{m_2} \dots y_n^{m_n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= (m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \dots + m_n \lambda_n) y^k \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

\mathbf{e}_s 是 A 的第 s 个本征向量, 则有

$$A y^k \mathbf{e}_s = \lambda_s y^k \mathbf{e}_s \quad (5.4.16)$$

将式(5.4.6)中的函数 F 以 $\mathbf{h}_k(\mathbf{y})$ 代替, 并将式(5.4.15)和(5.4.16)代入, 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_A \mathbf{h}_k(\mathbf{y}) &= D(y^m \mathbf{e}_s) A\mathbf{y} - A(y^m \mathbf{e}_s) \\ &= (m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \dots + m_n \lambda_n - \lambda_s) y^m \mathbf{e}_s \\ &= (m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \dots + m_n \lambda_n - \lambda_s) \mathbf{h}_k(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

表明 \mathbf{L}_A 对应的矩阵为对角阵, 其本征值具有 $(m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \dots + m_n \lambda_n) - \lambda_s$ 的形式。因此当且仅当矩阵 A 不存在本征值共振时算子 \mathbf{L}_A 可逆, 式(5.4.12)在 H_n^k 中有解。

若 A 存在重本征值, A 的若当标准形为上三角矩阵。此时, 可以证明 \mathbf{L}_A 也有相应的若当块, 且 \mathbf{L}_A 的本征值仍具有 $(m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \dots + m_n \lambda_n) - \lambda_s$ 的形式。因此, 若 A 是上三角的若当标准形, 可以适当选取变换(5.4.2), 使得式(5.4.10)的右端仅由满足条件(5.4.14)的多项式 $y^k \mathbf{e}_s$ 构成。这个结论可以简化 PB 范式的计算。

例 5.4-2 确定系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= 2x + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + \cdots \\ \dot{y} &= y + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

的 PB 范式,其中省略号表示高于 2 次的项。

解: 系统(a)的线性部分的本征值为 $\lambda_1 = 2$ 和 $\lambda_2 = 1$, 可能的共振为

$$2m_1 + m_2 = 2 \quad \text{或} \quad 2m_1 + m_2 = 1 \quad (b)$$

式(b)满足条件 $m_1 + m_2 \geq 2$ 的解仅有 $m_1 = 0$ 和 $m_2 = 2$, 故共振项为 $v^2(1, 0)^T$, 相应的范式为

$$\dot{u} = 2u + cv^2, \quad \dot{v} = v$$

例 5.4-3 证明受扰动的线性简谐振子

$$\dot{x} = y + \cdots, \quad \dot{y} = -x + \cdots \quad (a)$$

的 PB 范式仅含有奇数次项,其中省略号表示高于 1 次的项。

解: 系统(a)的线性部分的本征值为 $\lambda_1 = i$ 和 $\lambda_2 = -i$, 可能的共振为

$$m_1i - m_2i = \pm i \quad (b)$$

由式(b)导出 $m_1 = m_2 \pm 1$, 则 PB 范式的共振项具有 $u^{m_1}v^{m_2}$ 的形式, 其阶 $k = m_1 + m_2 = 2m_2 \pm 1$ 为奇数。

5.4.4 计算 PB 范式的矩阵表示法

计算 PB 范式的关键是确定前述的补空间 G_n^l 。由于 H_n^l 为有限维线性空间, L_A 是线性算子, 因此可以利用给定 H_n^l 基下 L_A 的矩阵表示来求出补空间 G_n^l , 进而得到 PB 范式, 这种方法称为矩阵表示法。利用线性代数知识可以证明以下结果。

设 $\{e_1, \cdots, e_s\}$ 为 H_n^l 的一组基, 算子 L_A 在该组基下的矩阵为 L , 则 L 的复共轭装置 L^* 的核空间 $\text{Ker } L^*$ 是 $L_A(H_n^l)$ 在 H_n^l 中的一个补空间, 即 $H_n^l = L_A(H_n^l) \oplus \text{Ker } L^*$ 。从而可以取 $G_n^l = \text{Ker } L^*$ 。

例 5.4-4 计算微分方程

$$\dot{x} = Ax + \tilde{f}(x) \quad (a)$$

其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}(x) = o(x) \quad (b)$$

的二阶 PB 范式。

解: 令 $y = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ 。设

$$P_2(y) = (a_1 y_1^2 + b_1 y_1 y_2 + c_1 y_2^2, a_2 y_1^2 + b_2 y_1 y_2 + c_2 y_2^2)^T \quad (c)$$

取线性空间 H_2^2 的一组基

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (d)$$

根据算子 L_A 的定义(5.4.6), 对于任意 $F(y) = (F_1(y), F_2(y))^T \in H_2^2$ 有

$$\begin{aligned} L_A F(y) &= DF(y)Ay - AF(y) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_2 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} - F_2 \\ y_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \end{pmatrix} \quad (e) \end{aligned}$$

对于基向量 $e_i (i=1, \dots, 6)$, 将式(d)代入, 得到

$$\left. \begin{aligned} L_A e_1 &= \begin{pmatrix} -y_1^2 \\ 2y_1 y_2 \end{pmatrix} = 2e_2 - e_4, & L_A e_2 &= \begin{pmatrix} -y_1 y_2 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = e_3 - e_5, \\ L_A e_3 &= \begin{pmatrix} -y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_6, & L_A e_4 &= \begin{pmatrix} -2y_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_5, \\ L_A e_5 &= \begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} = e_6, & L_A e_6 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

从而得到线性算子 L_A 在该组基下的表示:

$$L_A(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6) = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)L \quad (g)$$

其中

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (h)$$

为确定 $\text{Ker } L^*$, 需要求解线性代数方程组

$$L^* z = 0 \quad (i)$$

对于实矩阵 L , 有 $L^* = L^T$ 。可以得到(i)的一个由 $6 - \text{rank } L^* = 2$ 个向量构成的基础解系:

$$\{(0, 1, 0, 2, 0, 0)^T, (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T\} = \{i_2 + 2i_4, i_1\} \quad (j)$$

它是 $\text{Ker } L^*$ 的一组基, 并对应于 $G_2^2 \subset H_2^2$ 的基

$$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} = \{e_2 + 2e_4, e_1\} = \{(2y_1^2, y_1 y_2)^T, (0, y_1^2)^T\} \quad (k)$$

因此任意 $g_2 \in G_2^2$ 都可写为

$$g(y) = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 \quad (l)$$

其中 a 和 b 为常数。相应地, 系统(a)的一个二阶范式为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + 2ay_1^2 \\ \dot{y}_2 = ay_1 y_2 + by_1^2 \end{cases} \quad (m)$$

其中常数 a 和 b 与式(a)中函数 \tilde{f} 的具体形式有关。若需要确定常数 a 和 b , 将坐标变换

$$x = y + P_2(y) \quad (n)$$

代入式(a), 并将其中的 \tilde{f} 展开为幂级数, 比较同次幂系数可以得到式(c)和(m)中的待定常数。

尽管矩阵表示法的原理比较简单, 但注意到 H_n^l 的维数为 $n(n+l-1)!/[l!(n-1)!]$, 随着 n 和 l 的增大而迅速增大, 从而使计算量变得非常大。此外, 在求不同阶的 PB 范式时要用不同的线性代数方程组求解, 更增加了计算的复杂性。

5.4.5 计算 PB 范式的共轭算子法

通过在 H_n^l 中适当地定义内积的方法, 可以证明下列结论^[53]:

设 $A = Df(0)$ 的复共轭转置矩阵为 A^* , 则在 H_n^k 中, 线性算子 $L_A \cdot$ 的核空间 $\text{Ker } L_A \cdot$ 为 $L_A(H_n^l)$ 在 H_n^k 中的补空间, 即 $H_n^k = L_A(H_n^l) \oplus \text{Ker } L_A^*$ 。

根据上述结论, 可以取 $G_n^k = \text{Ker } L_A \cdot$ 。为确定 $\text{Ker } L_A \cdot$, 需要求线性偏微分方程:

$$DF(y) A^* y - A^* F(y) = 0 \quad (5.4.18)$$

在 H_n^k 中的全部多项式解 $F(y)$ 。这种计算 PB 范式的方法称为共轭算子法。

例 5.4-5 用共轭算子法计算到 5.4-4 中系统(a)的 2 阶 PB 范式。

对于例 5.4-4 的系统(a),

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (a)$$

记 $y = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ 和 $F(y) = (F_1(y), F_2(y))^T \in H_2^2$ 。式(5.4.18)可写为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (b)$$

即

$$\left(y_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_2}, y_1 \frac{\partial F_2}{\partial y_2} - F_1 \right)^T = 0 \quad (c)$$

对于 $F \in H_2^2$, 由方程(c)可得到全部解

$$F(y) = (ay_1^2, ay_1y_2 + by_1^2)^T \quad (d)$$

其中 a 和 b 为任意常数。 $G_2^2 = \text{Ker } L_A \cdot$ 由式(d)给出的 $F(y)$ 全体构成。从而得到例 5.4-4 系统(a)的二阶 PB 范式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + ay_1^2 \\ \dot{y}_2 &= ay_1y_2 + by_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

在例 5.4-4 和例 5.4-5 中, 由于所取的补空间 G_2^2 不同, 二阶 PB 范式也有差别。这也说明了 PB 范式的不唯一性。

共轭算子法的最大优点在于求不同阶的 PB 范式都用同样的偏微分方程组(5.4.18), 仅是解空间取法不同, 而且不必进行大量的矩阵运算。但在实际计算中尚无通用的方法求出方程(5.4.18)在 H_n^k 中的全部多项式解。计算 PB 范式还有其它方法, 如李(M.S.Lie)代数法、对称不变量法等, 可参阅文献[53]。

5.4.6 PB 范式在分岔问题中的应用

将 PB 范式应用于研究分岔问题时, 需要考虑带参数的系统(5.1.1)。可以先将其写为扩张系统:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \mu) \\ \dot{\mu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.4.19)$$

然后对于扩张系统应用 PB 范式理论。需要注意的是此时坐标变换以及范式的系数均与参数 μ 有关, 而且坐标变换应保持 $\dot{\mu} = 0$ 不变。

§ 5.5 奇异性理论

5.5.1 分岔问题中的奇异性理论概述

奇异性理论是研究可微分映射在奇异点邻域中的性态及其分类的数学理论。它描述了系统连续变化过程中的间断结构。在静态分岔问题中, 分岔点必须是奇异点。通过分析方程右端函数在奇异点邻域中的性态, 以判定在该奇异点处是否确实出现静态分岔, 并进一步分析分岔的类型和性质。通过奇异性的分析, 将其平衡点的分岔化为比较简单的范式(识别问题), 进而可以由幂级数展开的前有限项确定多重解的性态。还可以研究静态分岔在一般扰动下解的结构及其不变性质(开折问题), 并对所涉及的分岔进行分类(分类问题)。

奇异性理论起源于 20 世纪 40 年代惠特尼(H. Whitney)和莫尔斯(M. Morse)等的工作。在 60 年代末马瑟(J. N. Mather)基本上建立了奇异性的数学理论。20 世纪 70 年代初托姆(R. Thom)以奇异性理论为基础提出突变理论。70 年代末以来, 戈鲁比茨基(M. Golubitsky)和沙弗(D. G. Schaeffer)等将奇异性理论与群论方法相结合, 系统地应用于分岔问题的研究, 使得奇异性理论成为解决分岔问题的重要方法。

在实际应用中,奇异性理论可以从系统的大量参数中辨别出少数能反映结构稳定性本质的参数,从而可以在总体上把握系统的分岔特性并进行理论预测。奇异性理论不仅适用于静态分岔,还可以处理霍普夫分岔。因此是研究平衡点分岔的一种统一而有效的方法。本书仅叙述奇异性理论在分岔中应用的最基本知识,讨论一维系统的静态分岔问题。这不仅已说明了应用奇异性理论的基本思路,而且对于实际问题中一些比较复杂的系统,经过采用中心流形方法或LS约化处理后,可以化为一维系统。奇异性理论更全面地阐述,可参阅文献[31,37,86,111]。

5.5.2 识别问题

对于单参数一维系统的静态分岔问题,需要讨论代数方程

$$g(x, \mu) = 0 \quad x \in U, \quad \mu \in V \quad (5.5.1)$$

的奇异点邻域的性质,其中函数 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 具有无穷多次连续导数。本节所涉及的函数均具有无穷多阶连续导数,除非另有说明。不失一般性,设 $(0,0) \in U \times V$ 为奇异点,则

$$g(0,0) = 0, \quad g_x(0,0) = 0 \quad (5.5.2)$$

其中 g_x 表示 $\partial g / \partial x$ 。为行文简便,本节采用这种记号表示函数的偏导数,以后再有类似记号不再说明。静态分岔仅涉及在奇异点附近的函数性质,故任何在 $(0,0)$ 小邻域内满足

$$g_1(x, \mu) = g_2(x, \mu) \quad (5.5.3)$$

的函数 g_1 和 g_2 对于这里所讨论的问题并没有区别,这时称函数 g_1 和 g_2 作为芽相等。以下对于作为芽是相等的函数不加区别,因此每个函数均可以认为是作为芽相等的一类函数的代表。

分岔的识别问题是对于给定的存在奇异点的函数 g ,确定与 g 静态分岔特性相同的一类函数在奇异点所满足的条件。为对函数进行分类,先引入等价关系。对于函数 g 和 h ,若在 $(0,0)$ 邻域存在同胚 $(x, \mu) \mapsto (X(x, \mu), M(\mu))$ 和 $S(x, \mu)$ 满足 $X(0,0)=0, M(0)=0, X_x(0,0)>0, M'(0)>0$ 和 $S(0,0)>0$,且使得

$$g(x, \mu) = S(x, \mu)h(X(x, \mu), M(\mu)) \quad (5.5.4)$$

则称 g 和 h 为接触等价。记为 $g \sim h$ 。若在前述定义中取 $M(\mu) = \mu$,则称 g 和 h 为强等价,记为 $g \stackrel{s}{\sim} h$ 。容易验证,当 $g \stackrel{s}{\sim} h$ 时必有 $g \sim h$ 。

由式(5.5.4)知,当 $g \sim h$ 时,在 $(0,0)$ 的充分小邻域中有 $S(x,\mu) \neq 0$,故函数 $g(x,\mu)$ 和 $h(x,\mu)$ 之间可以通过局部微分同胚 (X,M) 相互变换,从而 g 和 h 在有相同的分岔特性。具体地,若 $(0,0)$ 为 g 的奇异点,则 $(0,0)$ 也是 h 的奇异点。代数方程 $g(x,\mu) = 0$ 和 $h(x,\mu) = 0$ 在 $(0,0)$ 邻域内解的数目相同;微分方程 $\dot{x} + g(x,\mu) = 0$ 和 $\dot{x} + h(x,\mu) = 0$ 的对应相轨迹有相同的时间定向(这是由 $X_x > 0$ 和 $S > 0$ 保证),故对应平衡点的稳定性相同。

在识别问题中,不考虑参数的变换,因此采用强等价关系。在后面讨论开折问题时需要接触等价关系。对于 h 的识别问题,即确定与 h 强等价的 g 在 $(0,0)$ 所满足的条件,这些条件称为识别条件。显然,对于满足 h 的识别条件的 g ,其静态分岔特性与 h 相同。

为便于应用,通常选取若干简单而有代表性的多项式函数 $h(x,\mu)$ 来确定识别条件,这些函数 $h(x,\mu)$ 称为戈鲁比茨基-沙弗范式,简称 GS 范式。若于重要分岔问题的 GS 范式及其识别条件如表 5.1 所列。其一般的证明需要较多数学知识,而每种识别条件单独证明也较繁复,可参阅文献[31]第 93~96 页或文献[111]第 56~58 页,这里从略。

表 5.1 若干 GS 范式的识别条件

GS 范式	识别条件
$\varepsilon x^k + \delta \mu (k \geq 2)$	$g = g_x = \cdots = \partial^{k-1} g / \partial x^{k-1} = 0; \partial^k g / \partial x^k \neq 0, g_\mu \neq 0;$ $\varepsilon = \operatorname{sgn} \partial^k g / \partial x^k, \delta = \operatorname{sgn} g_\mu$
$\varepsilon x^k + \delta \mu x (k \geq 2)$	$g = g_x = \cdots = \partial^{k-1} g / \partial x^{k-1} = g_\mu = 0; \partial^k g / \partial x^k \neq 0, g_{x\mu} \neq 0;$ $\varepsilon = \operatorname{sgn} \partial^k g / \partial x^k, \delta = \operatorname{sgn} g_{x\mu}$
$\varepsilon (x^2 + \delta \mu^2)$	$g = g_x = g_\mu = 0; g_{xx} \neq 0, \Delta \neq 0; \varepsilon = \operatorname{sgn} g_{xx}, \delta = \operatorname{sgn} \Delta$
$\varepsilon x^2 + \delta \mu^3$	$g = g_x = g_\mu = \Delta = 0; g_{x\mu} \neq 0, g_{vvv} \neq 0; \varepsilon = \operatorname{sgn} g_{x\mu}, \delta = \operatorname{sgn} g_{vvv}$
$\varepsilon x^2 + \delta \mu^4$	$g = g_x = g_\mu = \Delta = g_{vvv} = 0; g_{xx} \neq 0, g_{vvv}g_{xx} - 3g_{vvr}^2 \neq 0;$ $\varepsilon = \operatorname{sgn} g_{xx}, \delta = \operatorname{sgn}(g_{vvv}g_{xx} - 3g_{vvr}^2)$
$\varepsilon x^3 + \delta \mu^2$	$g = g_x = g_\mu = g_{xx} = g_{r\mu} = 0; g_{xxx} \neq 0, g_{\mu\mu} \neq 0;$ $\varepsilon = \operatorname{sgn} g_{xxx}, \delta = \operatorname{sgn} g_{\mu\mu}$

在表 5.1 中, sgn 为符号函数, $\Delta = g_{xx}g_{\mu\mu} - g_{x\mu}g_{\mu x}$ 是函数 $g(x,\mu)$ 的黑塞(L.O.Hesse)矩阵 D^2g 的行列式。 v 为对应 D^2g 零本征值的本征向量,即满足 $(D^2g)v = 0$, g_v 表示沿 v 方向的导数。

值得注意的是,在表 5.1 中给出的识别条件仅涉及 g 的有限个偏导数,这表明 g 在奇异点邻域的性质可以由幂级数展开式的低阶项完全确定;这种性质称为有限确定性。在表 5.1 中 GS 范式的分岔性态容易得到。因此对于更复杂的方程 $g(x, \mu) = 0$, 只要函数 g 满足表 5.1 中某个 GS 范式的识别条件,就可以根据范式得知 g 的静态分岔性态。

许多高维静态分岔问题可以通过 LS 约化转化为单变量静态分岔问题。虽然一般难以得到约化函数的显式表达,但根据 § 5.2 得知,可直接利用原来的函数计算约化函数的各阶偏导数,因此奇异性理论特别适合与 LS 约化配合使用研究静态分岔问题。

5.5.3 开折问题

系统方程往往是对真实研究对象进行一定简化后得到的理想化数学模型。真实状态通常与理想状态存在微小的差别,称为非完全性。一般可以将非完全性视为对理想状态的一个小扰动。这种扰动所引起的分岔性态的定性变化称为非完全分岔。非完全性可以通过引入一些附加参数,即 § 5.1 定义的开折方法去描述可能出现的扰动,然后对受扰动后的分岔特性进行分类。

若对于函数 $g(x, \mu)$, 存在函数 $G(x, \mu, \alpha)$, 其中 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T \in K \subset \mathbb{R}^k$ 且 $0 \in K$, 使得当 $\alpha = 0$ 时有

$$G(x, \mu, 0) = g(x, \mu) \quad (5.5.5)$$

则称 $G: U \times J \times K \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $g: U \times J \rightarrow \mathbb{R}$ 的一个 k 参数开折, α 为开折参数。作为特例, g 的 0-参数开折即为函数 g 本身。注意到

$$G(x, \mu, \alpha) = g(x, \mu) + (G(x, \mu, \alpha) - G(x, \mu, 0)) \quad (5.5.6)$$

可以将 $G(x, \mu, \alpha)$ 视为 $g(x, \mu)$ 的某个扰动函数, 其中扰动与 k 个附加参数 $\alpha_i (i=1, \dots, k)$ 有关。函数 $g(x, \mu)$ 有无穷多个开折, 现讨论开折之间的关系。

设 $G(x, \mu, \alpha) (\alpha \in \mathbb{R}^k)$ 和 $H(x, \mu, \beta) (\beta \in \mathbb{R}^l)$ 均为函数 $g(x, \mu)$ 的开折。若在 $(x, \mu, \beta) = (0, 0, 0)$ 的某个邻域存在同胚 $(x, \mu) \mapsto (x, \mu, \beta)$ 以及函数 $S(x, \mu, \beta)$ 和 $A(\beta)$, 并满足不等式

$$S(0, 0, 0) > 0, \quad X_r(0, 0, 0) > 0, \quad M_\mu(0, 0) > 0 \quad (5.5.7)$$

和恒等式

$$S(x, \mu, 0) = 1, \quad X(x, \mu, 0) = x, \quad M(\mu, 0) = \mu, \quad A(0) = 0 \quad (5.5.8)$$

使得

$$H(x, \mu, \beta) = S(x, \mu, \beta)G(X(x, \mu, \beta), M(\mu, \beta), A(\beta)) \quad (5.5.9)$$

则称 H 由 G 代理。这里不等式 (5.5.7) 表明接触等价性, 恒等式 (5.5.8) 表明 $G(x, \mu, 0)$ 和 $H(x, \mu, 0)$ 都等于 $g(x, \mu)$, 从而满足开折的定义。式 (5.5.9) 表明开折 H 与开折 G 接触等价, 因而在接触等价的意义上开折 G 包含了由开折 H 给出的一切扰动。

若 G 是函数 g 的某个开折, 且 g 的任意开折都可以由 G 代理, 则称 G 为 g 的一个普用开折。 g 的普用开折可以有无穷多个, 普用开折中所含附加参数最少的开折称为普适开折, 其中开折参数的个数称为函数的余维数, 函数 g 的余维数记作 $\text{codim } g$ 。并非任何函数都存在普用开折。没有普用开折的函数的余维数称为无限大。此外, 函数的普适开折一般不是唯一的, 但不同的普适开折均有相同的余维数。

函数 g 的普适开折在接触等价的意义上引进数目最少的附加参数就能包含 g 的所有扰动函数。因此, 在研究代数方程 $g=0$ 受扰动后可能出现的各种分岔性态时, 普适开折起着非常重要的作用。

在应用中, 往往需要考虑普适开折的识别问题。已知函数 $g(x, \mu)$ 与某个余维数为 k 的 GS 范式 $h(x, \mu)$ 强等价, $G(x, \mu, \alpha)$ 为 g 的一个 k -参数开折, 需要判定 G 是否为 g 的普适开折。为此, 需要利用 g 和 G 的一些偏导数构造某个矩阵 A , 可以证明 (参阅文献 [31] 第 133~139 页和文献 [111] 第 62~64 页), G 为 g 的普适开折的充要条件是

$$\det A(0, 0, 0) \neq 0 \quad (5.5.10)$$

表 5.2 对于一些重要的 GS 范式给出相应的矩阵 A , 在表 5.2 中, α, β, γ 等为普适开折中的开折参数, $\epsilon, \delta = \pm 1$ 。

表 5.2 普适开折的识别条件

GS 范式	矩阵 A
$\epsilon x^2 + \delta \mu$	无
$\epsilon(x^2 + \delta \mu^2)$	G_α
$\epsilon x^3 + \delta \mu$	$\begin{pmatrix} g_\mu & g_{\mu x} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} \end{pmatrix}$
$\epsilon x^2 + \delta \mu^3$	$\begin{pmatrix} 0 & g_{xx} & g_{xy} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha \mu} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta \mu} \end{pmatrix}$

续表

GS 范式	矩阵 A
$\varepsilon x^3 + \delta \mu x$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{x\mu} & g_{xxx} \\ 0 & g_{\mu x} & g_{\mu\mu} & g_{\mu xx} \\ G_a & G_{ax} & G_{a\mu} & G_{axx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} \end{pmatrix}$
$\varepsilon x^4 + \delta \mu$	$\begin{pmatrix} g_\mu & g_{\mu x} & g_{\mu xx} \\ G_a & G_{ax} & G_{axx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta xx} \end{pmatrix}$
$\varepsilon x^2 + \delta \mu^4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{xx} & g_{x\mu} & g_{\mu\mu} \\ 0 & g_{xx} & g_{x\mu} & g_{xxx} & g_{xx\mu} & g_{x\mu\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{x\mu} & 2g_{\mu\mu} \\ G_a & G_{ax} & G_{a\mu} & G_{axx} & G_{ax\mu} & G_{a\mu\mu} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} & G_{\beta x\mu} & G_{\beta\mu\mu} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\mu} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma x\mu} & G_{\gamma\mu\mu} \end{pmatrix}$
$\varepsilon x^3 + \delta \mu^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{x\mu} & g_{xxx} & g_{xx\mu} \\ 0 & g_{\mu x} & g_{\mu\mu} & g_{\mu xx} & g_{\mu\mu x} \\ G_a & G_{ax} & G_{a\mu} & G_{axx} & G_{a\mu x} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} & G_{\beta\mu x} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\mu} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma\mu x} \end{pmatrix}$
$\varepsilon x^4 + \delta \mu x$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{x\mu} & 0 & g_{xxxx} \\ 0 & g_{\mu x} & g_{\mu\mu} & g_{\mu xx} & g_{\mu xxx} \\ G_a & G_{ax} & G_{a\mu} & G_{axx} & G_{axxx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} & G_{\beta xxx} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\mu} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma xxx} \end{pmatrix}$
$\varepsilon x^5 + \delta \mu$	$\begin{pmatrix} g_\mu & g_{\mu x} & g_{\mu xx} & g_{\mu xxx} \\ G_a & G_{ax} & G_{axx} & G_{axxx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta xx} & G_{\beta xxx} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma xxx} \end{pmatrix}$

设 $G(x, \mu, \alpha)$ 为函数 g 的一个 k 参数普适开折, $(0, 0)$ 为 g 的一个奇异点。由于普适开折 G 已包含了对 g 的一切扰动, 因此 G 的分岔图反映了当 g 受扰动时可能出现的各种分岔性态。现进一步讨论开折参数 α 对普适开折 G 的分岔图的影响, 即持久性问题。

若对 $\alpha \in \mathbb{R}^k$ 的某个邻域 K 内的任何 β , $G(x, \mu, \alpha)$ 与 $G(x, \mu, \beta)$ 接触等价, 从而当 $G(x, \mu, \alpha)$ 受到小扰动时分岔图的定性性态保持不变, 则称 G 在 α 处的分岔图为持久的, 即分岔为通有的。反之, 分岔图为非持久的, 分岔为退化的。

可以证明, 当且仅当开折参数 α 属于下列点集之一时, $G(x, \mu, \alpha)$ 的分岔图为非持久的:

(1) $B = \{\alpha \in \mathbb{R}^k \mid \text{存在}(x, \mu) \text{使得在}(x, \mu, \alpha) \text{处有 } G = G_x = G_\mu = 0\}$;

(2) $H = \{\alpha \in \mathbb{R}^k \mid \text{存在}(x, \mu) \text{使得在}(x, \mu, \alpha) \text{处有 } G = G_x = G_{xx} = 0\}$;

(3) $D = \{\alpha \in \mathbb{R}^k \mid \text{存在}(x_i, \mu) (i=1, 2) \text{且 } x_1 \neq x_2 \text{使得在}(x_i, \mu, \alpha) \text{处有 } G = G_x = 0\}$ 。

将满足集合 B, H 和 D 条件的 $G(x, \mu, \alpha)$ 的奇异点 (x, μ) 分别称为歧点、滞后点和双极限点。在方程 $g(x, \mu) = 0$ 的解曲线上, 歧点处还有另外的解曲线通过, 滞后点处的切线垂直于 μ 轴且解曲线位于该切线的两侧, 双极限点处有 μ 坐标相同的两个转向点。

$G(x, \mu, \alpha)$ 的非持久分岔图对应的开折参数的集合 $\Sigma = B \cup H \cup D$ 称为迁移集。迁移集将开折参数空间 \mathbb{R}^k 分成若干个子区域。可以将 $G(x, \mu, \alpha)$ 的分岔图按开折参数 α 分为持久和非持久的两大类。当 $\alpha \in \Sigma$ 时, $G(x, \mu, \alpha)$ 的分岔图不是持久的, 并可按 Σ 的不同子集作进一步分类。当 $\alpha \notin \Sigma$ 时, $G(x, \mu, \alpha)$ 的分岔图是持久的, 并可以按各子区域作进一步的分类。这样, 可以对 g 受扰动后可能出现的各种通有或退化的分岔进行分析。

当 $\text{codim } g = 0$ 时, g 的普适开折即为 g 本身, 这种静态分岔为通有的。当 $\text{codim } g \geq 1$ 时, 静态分岔是退化的。余维数 $\text{codim } g$ 表示了 g 静态分岔的退化程度。余维数愈大, 静态分岔的退化程度愈大, 受到扰动后可以出现的不同分岔性态愈多。退化分岔可以通过开折的方法扩展为退化程度较小的分岔。对于普适开折 $G(x, \mu, \alpha)$, 当 $\alpha \notin \Sigma$ 时, 分岔为通有

的;当 $\alpha \in \Sigma$ 但 $\alpha \neq 0$ 时,分岔为退化的,但退化程度比 $\alpha = 0$ 时小。

对于多参数的静态分岔问题,可以作为单参数分岔的普适开折问题处理,这样便于在参数空间中讨论。对于应用中出现的多参数分岔问题,普适开折提供了有关实际参数空间的结构和选择定性分析所需要的组合参数的重要信息。尽管从理论上普适开折处理的仍是局部分岔性态,但有时可以通过局部结果来得到若干全局分岔性态。

5.5.4 分类问题

现讨论单参数的一维系统 $\dot{x} + g(x, \mu) = 0$ 静态分岔按分岔特性进行分类的问题。由于随着 g 余维数增加,奇异点的退化程度增大,在受扰动后可能出现的分岔情况愈来愈复杂,因此余维数在静态分岔的分类问题中起重要作用。这里仅对余维数不超过 3 的奇异点进行分类,这些分岔称为初等分岔。

可以证明(参阅文献[31]第 200~202 页或文献[111]第 68~70 页),若函数 g 在奇异点 $(0,0)$ 的余维数不超过 3,则必与表 5.3 所列的 11 种 GS 范式中的某一个强等价。即余维数不超过 3 的奇异点仅有 11 种静态分岔性态,相应的分岔图如表 5.4 所列。均为在实际应用中经常遇到的静态分岔类型。

表 5.3 余维数不超过 3 的奇异点的 GS 范式和普适开折

编号	名称	余维数	GS 范式	普适开折
1	极限点	0	$\epsilon x^2 + \delta \mu$	$\epsilon x^2 + \delta \mu$
2	跨临界点	1	$\epsilon(x^2 - \mu^2)$	$\epsilon(x^2 - \mu^2) + \alpha$
3	孤立点	1	$\epsilon(x^2 + \mu^2)$	$\epsilon(x^2 + \mu^2) + \alpha$
4	滞后点	1	$\epsilon x^3 + \delta \mu$	$\epsilon x^3 + \delta \mu + \alpha x$
5	非对称尖点	2	$\epsilon x^2 + \delta \mu^3$	$\epsilon x^2 + \delta \mu^3 + \alpha + \beta \mu$
6	叉形点	2	$\epsilon x^3 + \delta \mu x$	$\epsilon x^3 + \delta \mu x + \alpha + \beta x^2$
7	四次折叠点	2	$\epsilon x^4 + \delta \mu$	$\epsilon x^4 + \delta \mu + \alpha x + \beta x^2$
8	四次孤立点	3	$\epsilon x^2 + \delta \mu^4$	$\epsilon x^2 + \delta \mu^4 + \alpha + \beta \mu + \gamma \mu^2$
9	双翼尖点	3	$\epsilon x^3 + \delta \mu^2$	$\epsilon x^3 + \delta \mu^2 + \alpha + \beta x + \gamma \mu x$
10	四次跨临界点	3	$\epsilon x^4 + \delta \mu x$	$\epsilon x^4 + \delta \mu x + \alpha + \beta \mu + \gamma x^2$
11	五次滞后点	3	$\epsilon x^5 + \delta \mu$	$\epsilon x^5 + \delta \mu + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$

注:表中 δ 和 μ 可取 1 或 -1, α, β 和 γ 为开折参数。

表 5.4 11 种奇异点的分岔图

ε 编号	1		-1	
	-1	1	-1	1
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				

§ 5.6 霍普夫分岔及其控制

5.6.1 霍普夫分岔

霍普夫分岔 是指系统参数变化经过临界值时,平衡点由稳定变为不稳定并从中生长出极限环。它是一种比较简单而又重要的动态分岔问题,不仅在动态分岔研究和极限环研究中有理论价值,而且与工程中自激振动的产生有着密切联系,是工程中常见的现象。例如在 § 3.3 中已经分析了几种自激振动中的霍普夫分岔。伴随霍普夫分岔的自激振动可能导致燃汽轮机转子、飞机旋翼等系统失稳而引发严重后果。另一方面,在振荡器设计时则需要人为产生霍普夫分岔。早在 18 世纪中叶就已观察到离心调速仪失稳的霍普夫分岔现象。庞加莱在 1885 年研究了平面系统中的这类分岔现象,安德罗诺夫等在 1929 年建立了平面霍普夫分岔的理论,高维系统中霍普夫分岔的数学理论在 1942 年由霍普夫建立。

例 5.6-1 讨论平面系统

$\dot{x} = -y + x[\mu - (x^2 + y^2)], \quad \dot{y} = x + y[\mu - (x^2 + y^2)]$ (a)
的分岔。

解: 系统(a)对任意 μ 均有平衡点(0,0), 其雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \quad (b)$$

当 $\mu = 0$ 时有实部为零的纯虚本征值, 为非双曲平衡点。进行极坐标变换

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (c)$$

将式(a)化为

$$\dot{\rho} = \rho(\mu - \rho^2), \quad \dot{\varphi} = 1 \quad (d)$$

对于初始值 ρ_0 和 φ_0 , 可以积分得到

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{(2\rho_0^2 t + 1)}}, \quad \varphi = t + \varphi_0 \quad (\mu = 0) \quad (e)$$

$$\rho = \frac{\sqrt{|\mu|} \rho_0}{\sqrt{\rho_0^2 + (|\mu| - \rho_0^2)e^{-2\mu}}}, \quad \varphi = t + \varphi_0 \quad (\mu \neq 0) \quad (f)$$

由以上二式可知, 对于 $\mu \leq 0$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 0$, 即(0,0)为稳定焦点。对于 $\mu > 0$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = \sqrt{\mu}$, 即出现渐近稳定的极限环 $\rho = \sqrt{\mu}$, 或 $x^2 + y^2 = \mu$, 面(0,0)变为不稳定焦点。分岔图如图 5.16 所示。极限环在分岔参数大于临界值的情形下存在, 称为超临界霍普夫分岔。

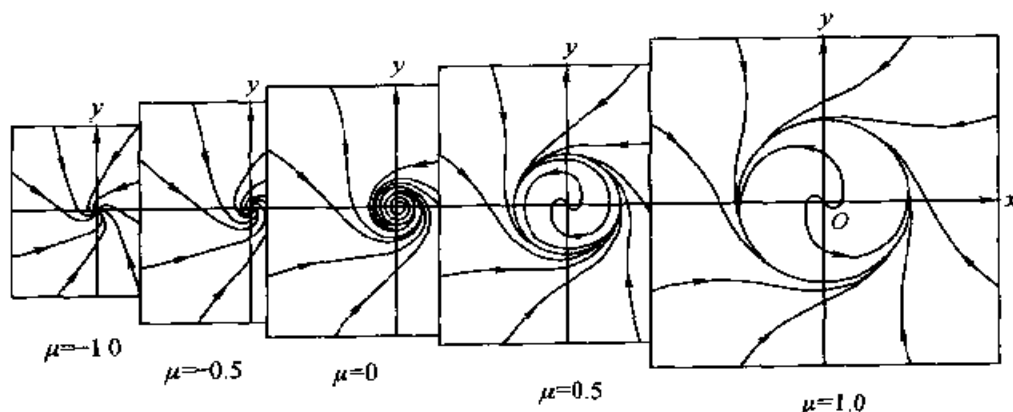


图 5.16 霍普夫分岔的相轨迹变化

5.6.2 平面系统的霍普夫分岔定理

研究带单参数的平面系统

$$\dot{x} = P(x, y, \mu), \quad \dot{y} = Q(x, y, \mu) \quad (5.6.1)$$

不失一般性, 设零点 $O(0, 0)$ 对 $\mu = 0$ 邻域内的任意参数 μ 值均为平衡点, 且 $\mu = 0$ 时在零点处的线性近似系统的平衡点为中心。经过适当的非奇异线性变换后, 新坐标仍用 x 和 y 表示, 系统(5.6.1)可改写为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(\mu)x - \beta(\mu)y + f(x, y, \mu) \\ \dot{y} &= \beta(\mu)x + \alpha(\mu)y + g(x, y, \mu) \end{aligned} \right\} \quad (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2, \quad \mu \in J \subset \mathbb{R} \quad (5.6.2)$$

其中函数 f 和 g 为 x 和 y 的不低于 2 次的项, 具有四阶连续偏导数, 且满足

$$f(0, 0, \mu) = g(0, 0, \mu) = 0 \quad \mu \in J \quad (5.6.3)$$

而在零点 $(0, 0)$ 的线性近似系统的复共轭本征值 $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ 当 $\mu = 0$ 时有

$$\alpha(0) = 0, \quad \beta(0) = \omega > 0 \quad (5.6.4)$$

可以证明, 系统(5.6.2)的一个三阶 PB 范式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= c\mu u - (e\mu + \omega)v + (au - bv)(u^2 + v^2) \\ \dot{v} &= (e\mu + \omega)u + c\mu v + (bu + av)(u^2 + v^2) \end{aligned} \right\} \quad (5.6.5)$$

化为极坐标形式:

$$\dot{\rho} = c\mu\rho + a\rho^3, \quad \dot{\varphi} = \omega + e\mu + b\rho^2 \quad (5.6.6)$$

其中

$$c = \alpha'(0), \quad e = \beta'(0) \quad (5.6.7)$$

$$a = \frac{1}{16} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \right) + \frac{1}{16\omega} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \quad (5.6.8)$$

上式中所有偏导数均在 $(x, y, \mu) = (0, 0, 0)$ 计算。可以证明, 原系统与其三阶 PB 范式有相同的分岔特性, 且有以下定理:

通有的平面霍普夫分岔定理: 设系统(5.6.2)满足条件(5.6.3)和(5.6.4), 且有 $c \neq 0$ 和 $a \neq 0$, 则系统(5.6.2)在 $\mu = 0$ 处出现霍普夫分岔。当 $\mu \neq 0$ 且 μ 与 a/c 异号时, 在 $(x, y) = (0, 0)$ 邻域内存在唯一的极

限环。当 $\mu \rightarrow 0$ 时,该极限环趋于原点,对充分小的 $|\mu|$,该极限环上各点向径的平均值与 $\sqrt{|\mu|}$ 成正比,周期接近 $2\pi/\omega$ 。当 $a < 0$ 时,极限环稳定;当 $a > 0$ 时,极限环不稳定。

此定理的证明详见附录四。在上述定理中,满足条件 $c \neq 0$ 和 $a \neq 0$ 的霍普夫分岔为通有的,而其它情形的霍普夫分岔为退化的。条件 $c \neq 0$ 表明系统(5.4.1)的线性近似系统的本征值当 $\mu = 0$ 时以不等于零的速率穿过虚轴。此时,对充分小的 $|\mu| \neq 0$ 有 $\alpha(\mu) \neq 0$,即系统在 $\mu \neq 0$ 时存在焦点,且 $\alpha(\mu)$ 在 $\mu = 0$ 的两侧异号。即当 μ 变化经过 0 时,焦点由稳定变为不稳定或由不稳定变为稳定。当条件 $c \neq 0$ 不成立时,仍可能发生霍普夫分岔,但出现的极限环可能不是唯一的。当条件 $a \neq 0$ 不成立时,也可能发生霍普夫分岔,而所出现的极限环的稳定性判定问题更为复杂。

例 5.6-2 用霍普夫分岔定理讨论例 5.6-1 平面系统(a)的分岔。

解: 将例 5.6-1(a)与式(5.6.2)比较,得到

$$\alpha(\mu) = \mu, \quad \beta(\mu) = 1 \quad (a)$$

$$f(x, y, \mu) = -x(x^2 + y^2), \quad g(x, y, \mu) = -(x^2 + y^2)y \quad (b)$$

由式(5.6.7)和(5.6.8),得到

$$c = 1 > 0, \quad a = -\frac{3}{4} < 0 \quad (c)$$

根据霍普夫分岔定理,对充分小的 $|\mu|$, $\mu > 0$ 时唯一存在稳定极限环,该极限环上各点向径的平均值与 $\sqrt{|\mu|}$ 成正比。这一结果与例 5.6-1 中具体求解后得到的结论一致。

5.6.3 范德波尔系统的霍普夫分岔

将范德波尔方程(1.4.2)中的 x 和 ϵ 改用 q 和 μ 表示,写为

$$\ddot{q} - \mu \dot{q}(1 - \delta q^2) + \omega_0^2 q = 0 \quad (5.6.9)$$

在 § 1.4 中,已经证明此系统当 $\delta = 1, \omega_0 = 1$ 时在 $\mu = 0$ 处出现霍普夫分岔。现利用霍普夫分岔定理重新讨论这一问题。

直接应用霍普夫分岔定理仅能说明极限环的存在性,但不能证明极限环的稳定性。事实上,将式(5.6.9)作非奇异线性变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu/2 & 1 \\ \sqrt{\omega_0^2 - (\mu/2)^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} \quad (5.6.10)$$

变换后可化作式(5.6.2)的形式,其中

$$\alpha(\mu) = \frac{\mu}{2}, \quad \beta(\mu) = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\mu}{2}\right)^2} \quad (5.6.11)$$

$$f(x, y, \mu) = -\frac{4\delta\mu}{4\omega_0^2 - \mu^2} \left[x + \frac{\mu y}{\sqrt{4\omega_0^2 - \mu^2}} \right] y^2, \quad g(x, y, \mu) = 0 \quad (5.6.12)$$

显然当 $\omega_0 > 0$ 时条件(5.6.3)和(5.6.4)可得到满足。根据式(5.6.7)和(5.6.8)可算出 $c > 0$, 且 $a = 0$ 。因此当 $\mu = 0$ 时出现霍普夫分岔而产生唯一的极限环,但这种霍普夫分岔为退化分岔。为判断极限环的稳定性需要计算更高阶的 PB 范式。

为能应用霍普夫分岔定理,在 $\mu \neq 0$ 时引入变换:

$$q = \begin{cases} \frac{u}{\sqrt{\mu}} & (\mu > 0) \\ \frac{u}{\sqrt{-\mu}} & (\mu < 0) \end{cases} \quad (5.6.13)$$

将式(5.6.12)代入式(5.6.8),得到

$$\ddot{u} - (\mu \mp \delta u^2) \dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad (5.6.14)$$

其中当 $\mu > 0$ 时 δ 前面的符号为负, $\mu < 0$ 时 δ 前面的符号为正。作非奇异线性变换,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu/2 & 1 \\ \sqrt{\omega_0^2 - (\mu/2)^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix} \quad (5.6.15)$$

变换后化作式(5.6.2)的形式,其中

$$\alpha(\mu) = \frac{\mu}{2}, \quad \beta(\mu) = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\mu}{2}\right)^2} \quad (5.6.16)$$

$$f(x, y, \mu) = \frac{4(\mp \delta)}{4\omega_0^2 - \mu^2} \left[x + \frac{\mu y}{\sqrt{4\omega_0^2 - \mu^2}} \right] y^2, \quad g(x, y, \mu) = 0 \quad (5.6.17)$$

根据式(5.6.7)和(5.6.8),得到

$$c = \frac{1}{2} > 0, \quad a = \frac{(\mp \delta)}{8\omega_0^2} \quad (5.6.18)$$

设 $\delta > 0$, 则当 $\mu > 0$ 时有 $a < 0$, 即 μ 与 a/c 异号。根据霍普夫分岔定理,在 $(x, y) = (0, 0)$ 邻域内存在唯一的稳定极限环。当 $\mu \rightarrow 0$ 时,该极限环

趋于原点,对充分小的 $|\mu|$,该极限环上各点向径的平均值与 $\sqrt{|\mu|}$ 成正比,周期接近 $2\pi/\omega_0$ 。同理可分析当 $\delta < 0$ 时的情形。

5.6.4 霍普夫分岔定理的高维推广

由于霍普夫分岔是一种局部分岔,利用中心流形定理可以将高维系统约化为二维系统,而得到一般的霍普夫分岔定理。

讨论带参数的 n 维系统

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (5.6.19)$$

设其中 f 对各变元均有4阶连续偏导数,且满足对包含0的开区间 J 中的一切 μ 均有 $f(0, \mu) = 0$,对于 $\mu \in J$,在 $(0, \mu)$ 计算的雅可比矩阵 $A(\mu) = D_x f(x, \mu)$ 在 $\mu = 0$ 邻域内有共轭本征值 $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$,且当 $\mu = 0$ 时式(5.6.4)成立, $A(\mu)$ 的其余 $n-2$ 个本征值均有非零实部。

通过坐标变换,可将式(5.6.19)化为等价形式

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= C(\mu)u + g_1(u, v, \mu) \\ \dot{v} &= B(\mu)v + g_2(u, v, \mu) \end{aligned} \right\} \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad v \in \mathbb{R}^{n-2} \quad (5.6.20)$$

其中

$$C(\mu) = \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & -\beta(\mu) \\ \beta(\mu) & \alpha(\mu) \end{pmatrix}, \quad \alpha(0) = 0, \quad \beta(0) = \omega_0 > 0 \quad (5.6.21)$$

$(n-2) \times (n-2)$ 矩阵 $B(\mu)$ 的本征值均不为零。根据中心流形定理,存在中心流形

$$v = h(u, \mu) \quad (5.6.22)$$

满足

$$D_x h(u, \mu)(C(\mu)u + g_1(u, v, \mu)) = B(\mu)v + g_2(u, v, \mu) \quad (5.6.23)$$

由式(5.6.23)解得(5.6.22),代入式(5.6.20),得到约化为二维的系统

$$\dot{u} = C(\mu)u + g_1(u, h(u, \mu), \mu) \quad (5.6.24)$$

应用霍普夫分岔定理可知,在 $\mu = 0$ 邻域内系统(5.6.19)存在极限环。若在 $\mu = 0$ 处有 $c = \alpha'(\mu) \neq 0$,则对于给定的 μ ,极限环是唯一的。对充分小的 $|\mu|$,该极限环上各点向径的平均值为 $O(\sqrt{|\mu|})$,周期为 $2\pi/\omega + O(|\mu|)$ 。

显然 $A(0)$ 的其余 $n-2$ 个本征值若有正实部,则分岔出现的极限环

是不稳定的,故极限环稳定的必要条件为 $\mathbf{A}(0)$ 的其余 $n-2$ 个本征值具有负实部。在非退化霍普夫分岔的情形,可以定义与式(5.6.8)类似的参数,导出极限环稳定的充分条件。设矩阵 $\mathbf{A}^T(0)$ 和 $\mathbf{A}(0)$ 零实部本征值对应的本征向量分别为 \mathbf{u}^T 和 \mathbf{v} ,且满足正则条件 $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = 0$,定义参数 ψ 如下:

$$\psi = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u_m v_j v_k \bar{v}_l \left[\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \left(2 \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_p} A_{pq}^{-1} \frac{\partial^2 f_q}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_l \partial x_p} (A - 2i\omega)_{pq}^{-1} \frac{\partial^2 f_q}{\partial x_j \partial x_k} \right) - \frac{\partial^3 f_m}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \right] \quad (5.6.25)$$

其中下标表示矩阵的元素。可以证明,^[15]当 ψ 的实部和 c 同号且 \mathbf{A} 的其余 $n-2$ 个本征值具有负实部时极限环稳定。对于退化霍普夫分岔所出现的极限环,判断稳定性的过程更为复杂。

5.6.5 霍普夫分岔的控制

设计一种控制器以改变给定非线性系统的分岔特性,并实现所期望的动力学行为称为分岔的控制。分岔的控制要解决的问题包括:延迟分岔的发生,在选定的参数值处引入新的分岔,改变存在分岔点的参数值,变化分岔序列的类型,镇定分岔解的某一支,调节分岔产生极限环的重数、幅值和频率,优化系统近分岔点的行为等。自20世纪90年代中后期起分岔的控制受到了广泛的重视,研究工作涉及机械、航空、电力、化工等工程领域和物理、化学、生物等科学领域。控制分岔的研究,对于有效地避免、延缓和消除分岔所导致的不良后果,提高系统的稳定性和可靠性具有理论指导意义,成为非线性振动的一个新的发展方向。目前研究较多的是静态分岔控制、霍普夫分岔控制和倍周期分岔控制。

早期对霍普夫分岔的驾驭通常是进行系统设计修正以避免霍普夫分岔,有时可能需要高昂的成本。近年来随着主动控制技术的发展,人们开始探索霍普夫分岔的主动控制。霍普夫分岔的控制主要包括三方面的内容:(1)抑制霍普夫分岔,以完全避免分岔的产生。(2)改变霍普夫分岔的定性特性,如分岔方向、分岔解的稳定性等。(3)改变霍普夫分岔解的定量特性,如改变周期解的幅值、频率。控制霍普夫分岔的理论基础是霍普夫分岔定理。控制霍普夫分岔的基本方法包括采用非线性静态或动态状态反馈控制,利用受控系统的范式及其相应不变量,应用谐波平衡法、

多尺度法等近似解析方法确定周期解,进行线性调节器设计等。在控制器设计中,关于霍普夫分岔的控制,还较多应用本书没有涉及到的频域描述(参阅文献[108])。

虽然分岔控制尤其是霍普夫分岔的控制具有重要的工程应用前景,但总体上仍处于起步阶段,有大量问题需要进一步研究,可参阅文献[127]。

§ 5.7 闭轨迹的分岔

5.7.1 闭轨迹分岔的例子

相空间中的闭轨迹对应于周期运动。具有非双曲闭轨迹的系统是结构不稳定的,适当的参数扰动可使闭轨迹附近的轨线拓扑结构发生变化,称为闭轨迹分岔。它是一种局部分岔,又是动态分岔。非双曲闭轨迹局部分岔的基本类型仍是叉式分岔、鞍结分岔和跨临界分岔。以下列平面系统为例。

例 5.7-1 讨论平面系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -y + x[1 - (x^2 + y^2)]\{\mu - [(x^2 + y^2) - 1]^2\} \\ \dot{y} &= x + y[1 - (x^2 + y^2)]\{\mu - [(x^2 + y^2) - 1]^2\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

的分岔。

解:系统(a)对任意 μ 均有平衡点 $(0,0)$,其雅可比矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mu - 1 & -1 \\ 1 & \mu - 1 \end{pmatrix} \quad (\text{b})$$

当 $\mu < 1$ 时 $(0,0)$ 为稳定焦点, $\mu > 1$ 时 $(0,0)$ 为不稳定焦点。进行极坐标变换

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (\text{c})$$

将式(a)化为

$$\dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2)[\mu - (\rho^2 - 1)^2], \quad \dot{\varphi} = 1 \quad (\text{d})$$

对任意实数 μ , 系统(d)有闭轨迹 $\rho = 1$, 当 $\mu < 0$ 时, $\rho = 1$ 不稳定。当 $\mu > 0$ 时, $\rho = 1$ 稳定。此时系统有不稳定闭轨迹 $\rho = \sqrt{1 + \sqrt{\mu}}$, 当 $0 < \mu < 1$ 时, 系统还有不稳定闭轨迹 $\rho = \sqrt{1 - \sqrt{\mu}}$ 。分岔图如图 5.17 所示。这

种分岔为闭轨迹的亚临界叉式分岔。如果将式(a)作时间反向变换, $t \rightarrow -t$, 则变换后的系统将出现超临界叉式分岔, 如图 5.18 所示。

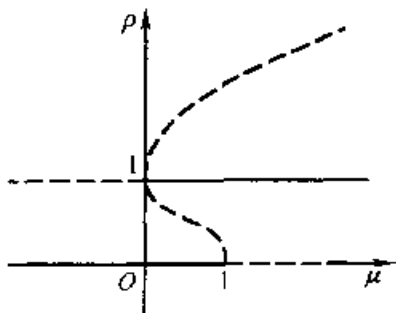


图 5.17 闭轨迹的亚临界叉式分岔

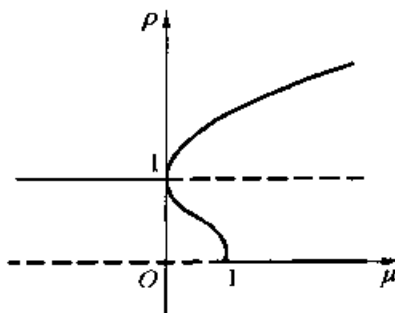


图 5.18 闭轨迹的超临界叉式分岔

例 5.7-2 讨论平面系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x\{\mu - [(x^2 + y^2) - 1]^2\} \\ \dot{y} = x - y\{\mu - [(x^2 + y^2) - 1]^2\} \end{cases} \quad (a)$$

的分岔。

解: 系统(a)对任意 μ 均有平衡点 $(0, 0)$, 其雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 1 - \mu & -1 \\ 1 & 1 - \mu \end{pmatrix} \quad (b)$$

当 $\mu < 1$ 时为不稳定焦点, $\mu \geq 1$ 时为稳定焦点。进行极坐标变换:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (c)$$

将式(a)化为

$$\dot{\rho} = \rho[\mu - (\rho^2 - 1)^2], \quad \dot{\varphi} = 1 \quad (d)$$

由式(d)看出, 当 $\mu < 0$ 时无闭轨迹; $\mu = 0$ 时有半稳定极限环 $\rho = 1$, 为非双曲闭轨迹; $0 < \mu < 1$ 时有稳定极限环 $\rho = \sqrt{1 - \sqrt{\mu}}$ 和不稳定极限环 $\rho = \sqrt{1 + \sqrt{\mu}}$; $\mu \geq 1$ 时仅有不稳定极限环 $\rho = \sqrt{1 + \sqrt{\mu}}$ 。相轨迹变化如图 5.19 所示。从 $\mu = 0$ 开始随着 μ 的增加, 半稳定闭轨迹转化为稳定极限环和不稳定闭轨迹, 这种分岔为闭轨迹的鞍结分岔。分岔图如图 5.20 所示, 在 $\mu = 1$ 处还出现平衡点的亚临界霍普夫分岔。

例 5.7-3 讨论平面系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x[1 - (x^2 + y^2)][1 + \mu - (x^2 + y^2)] \\ \dot{y} = x - y[1 - (x^2 + y^2)][1 + \mu - (x^2 + y^2)] \end{cases} \quad (a)$$

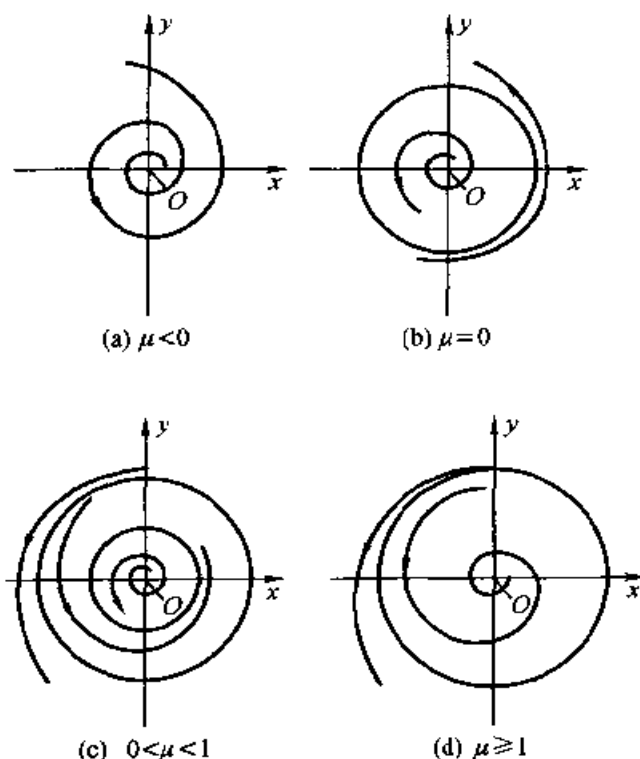


图 5.19 闭轨迹鞍结分岔的相轨迹变化

的分岔。

解：系统(a)对任意 μ 均有平衡点(0, 0),其雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -1-\mu & -1 \\ 1 & -1-\mu \end{bmatrix} \quad (b)$$

当 $\mu < -1$ 时为不稳定焦点, $\mu \geq -1$ 时为稳定焦点。进行极坐标变换:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (c)$$

将式(a)化为

$$\dot{\rho} = \rho(1-\rho^2)(1+\mu-\rho^2), \quad \dot{\varphi} = 1 \quad (d)$$

由式(d)看出,当 $\mu < 0$ 时有稳定极限环 $\rho = 1$ 和不稳定闭轨迹 $\rho = \sqrt{1+\mu}$;当 $\mu > 0$ 时有稳定极限环 $\rho = \sqrt{1+\mu}$ 和不稳定闭轨迹 $\rho = 1$ 。在 $\mu = 0$ 处,闭轨迹 $\rho = 1$ 和 $\rho = \sqrt{1+\mu}$ 的稳定性发生互换,这种分岔为闭轨迹的跨临界分岔。分岔图如图 5.21 所示,在 $\mu = -1$ 处还出现平衡点的

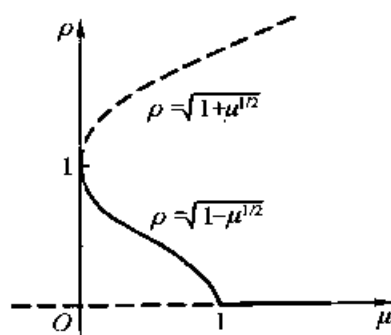


图 5.20 闭轨迹鞍结分岔的分岔图

超临界霍普夫分岔。

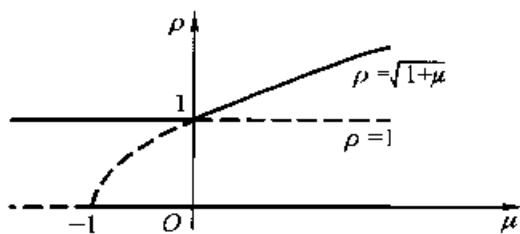


图 5.21 闭轨迹跨临界分岔的分岔图

5.7.2 庞加莱映射

庞加莱于 1881 年引入的首次返回映射,是研究闭轨迹即周期运动的稳定性及其分岔的几何方法。它可以将微分方程描述的非线性系统转化为用差分方程描述的映射。

设 Γ 为非线性系统 (5.3.6) 在 \mathbb{R}^n 中的解 $x = \phi_t(x_0)$ 对应的周期轨道,周期为 T 。选择 $n-1$ 维超曲面 Σ 为局部截面。截面 Σ 不一定是超平面,但必须与 Γ 处处横截即不相切地相交。适当选择截面 Σ 的大小,可以使 Σ 与 Γ 仅相交于一点。以 p 记轨道 Γ 与截面 Σ 相交的点,则从点 p 出发的轨道 Γ 经过时间 T 后首次返回截面 Σ ,即 $\phi_T(p) = p \in \Sigma$ 。取 $U \subset \Sigma$ 为 p 的一个邻域,如图 5.22 所示。当 U 足够小时,任意 $q \in U$ 充分靠近 p ,因而从 p 出发的轨道都可以再次返回截面 Σ 。故可定义映射 $P: U \rightarrow \Sigma$ 为

$$P(q) = \phi_\tau(q) \quad (5.7.1)$$

映射 P 称为庞加莱映射,又称截面映射或首次返回映射。其中时间间隔 $\tau = \tau(q)$ 是由 q 出发的轨道首次返回 Σ 所需的时间,一般与 q 有关,不一定为常数,但当 $q \rightarrow p$ 时有 $\tau \rightarrow T$ 。可以证明,当 f 具有连续

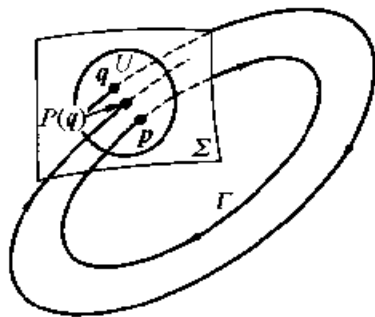


图 5.22 庞加莱映射示意图

m 阶导数时, P 为可逆映射,且映射 P 及其逆映射 P^{-1} 都具有连续 m 阶导数。映射 P 将微分方程 (5.3.6) 定义的非线性系统转化为式 (5.7.1) 定义的 $n-1$ 维映射。第一章中 §1.4 所定义的点映射为相平面上以线段为截面的庞加莱映射。

一般情形下,庞加莱映射是在周期轨道的局部定义的。对于受周期激励的系统,可以定义全局的庞加莱映射。设非自治系统

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (5.7.2)$$

右端为时间 t 的周期函数, 即存在 T 使 $f(x, t+T) = f(x, t)$ 。则系统 (5.7.2) 可改写为自治系统的形式

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \theta) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1 \quad (5.7.3)$$

注意到系统 (5.7.3) 与系统 (5.3.6) 不同, 其相空间为流形 $\mathbb{R}^n \times S^1$ 而不是 \mathbb{R}^n 。其中 S^1 为圆环, 对 $\theta \in S^1$ 有 $\theta + T = \theta$ 。对于自治系统 (5.7.3), 可定义全局的截面

$$\Sigma = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1 \mid \theta = \theta_0\} \quad (5.7.4)$$

此系统所有的轨道均与截面 Σ 横截相交。设方程 (5.7.3) 在初始条件 $x(x_0, \theta_0) = x_0$ 下的解为 $x(x_0, t)$, 则可以全局地定义庞加莱映射

$$P(x_0) = x(x_0, \theta_0 + T) \quad (5.7.5)$$

在这种情形, 时间间隔 $\tau = T$ 对所有点 $x_0 \in \Sigma$ 均相同。

例 5.7-4 建立平面自治系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

的庞加莱映射。

解: 在系统 (a) 中进行极坐标变换

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi \quad (b)$$

得到

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(1 - \rho^2) \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

积分式 (c), 得到 $t=0$ 时从 (ρ, φ) 出发的解为

$$\Phi_t(\rho, \varphi) = (\rho[\rho^2 + (1 - \rho^2)e^{-2t}]^{-1/2}, t + \varphi) \quad (d)$$

取正半轴 $x_1 > 0$ 为截面, 即

$$\Sigma = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 = 0\} \quad (e)$$

其极坐标形式为

$$\Sigma = \{(\rho, \varphi) \mid \rho > 0, \varphi = 0\} \quad (f)$$

对于任意 $(\rho, \varphi) \in \Sigma$, 首次返回 Σ 的时间均为 2π , 得到一维庞加莱映射 P :

$$P(\rho, \varphi) = \rho[\rho^2 + (1 - \rho^2)e^{-4\pi}]^{-1/2} \quad (g)$$

或转换回直角坐标, 写为

$$P(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} [x_1^2 + x_2^2 + (1 - x_1^2 - x_2^2)e^{-4\pi}]^{-1/2} \quad (h)$$

其中 $(x_1, x_2) \in \Sigma$ 。

5.7.3 映射的不动点及其不变流形

微分方程定义的非线性系统与映射存在密切的关系。一方面, 对解进行离散采样可以得到一个映射。例如, 每隔固定时间 T 对解 ϕ_t 采样得到映射, 前面讨论的庞加莱映射也是从解得到的映射。另一方面, 若给定映射 M^k , 将每次映射的点用曲线连接可构造微分方程的解曲线 ϕ_t , 使得每次映射的点成为解曲线 ϕ_t 上的点, 且具有以下性质: 若 $M^k(z) = \phi_{T^k}(z)$, 则 $M^{k+1}(z) = \phi_{T^{k+1}}(z)$ 。其中映射定义域中的点用 z 表示, 以区别于表示非线性系统相空间中的点 x 。这一过程称为纬垂, 如图 5.23 所示。但纬垂得到的解曲线不是唯一的, 图 5.23a 和 b 就给出同一映射纬垂得出不同解曲线的例子。非线性系统与映射之间往往存在相互对应的现象和问题。与非线性微分方程相比, 映射更为直观和简单, 因此人们通常先在映射的研究中发现有关结论, 然后再对非线性系统进行相应的研究。这种研究思路是由庞加莱所开创的。

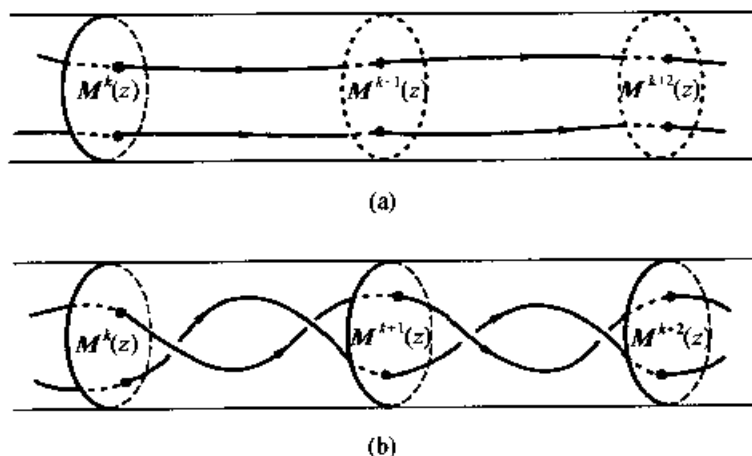


图 5.23 映射的纬垂及其不唯一性

对于映射, 可以定义轨道、不动点等概念。设 U 是 \mathbb{R}^n 中的一个开集, $M: U \rightarrow U$ 为可逆映射

$$z_{n+1} = M(z_n) \quad z_n \in U \quad (5.7.6)$$

映射 M^k 的过点 z 的轨道定义为集合 $\{M^k(z) | k \in Z\}$ 。若分别限制 $k \geq 0$ 或 $k \leq 0$, 则得到正半轨道和负半轨道。微分方程定义的非线性系统的轨道为 \mathbb{R}^n 中的连续曲线, 而映射的轨道为 \mathbb{R}^n 中的离散点列。若存在正整数 m 使得 $M^m(z) = z$, 则称 z 为映射 M 的周期点。使该式成立的最小正整数 m 称为 z 的周期。过周期点 z 的轨道称为周期轨道。 $m = 1$ 时的周期点称为不动点, 不动点 z 满足 $M(z) = z$ 。

类似于非线性系统可定义映射不动点的稳定性。设映射 M 有不动点 z_0 , 若对 z_0 的任意邻域 U , 都存在 z_0 的邻域 W_0 , 使得对任意 $z \in W_0$ 和一切 $k \geq 0$ 有 $M^k(z) \in U$, 则称不动点 z_0 为稳定。若稳定的不动点 z_0 对任意 $z \in W_0$ 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k(z) = z_0$, 则称不动点 z_0 为渐近稳定。若存在不动点 z_0 的一个邻域 U_0 , 对任意 z_0 的邻域 W , 存在 $z_1 \in W$ 和 $k_0 \geq 0$ 使得 $M^{k_0}(z_1) \notin U_0$, 则称不动点 z_0 为不稳定。对于映射不动点也可以应用李雅普诺夫直接方法的思想进行稳定性的判别。

映射不动点也存在不变流形。先定义线性映射的不变子空间。考虑线性映射

$$z_{n+1} = Az_n \quad (5.7.7)$$

其中 A 为 $n \times n$ 常值矩阵。零点 0 是系统(5.7.7)的不动点。可以证明, 当 A 的所有本征值模都小于 1 时, 零点是渐近稳定不动点。若 A 存在模大于 1 的本征值, 则零点是 unstable 不动点。将矩阵 A 的模小于 1、等于 1 和大于 1 的本征值对应的本征向量张成的子空间 E^s, E^c 和 E^u , 分别称为线性映射(5.7.7)的稳定子空间、中心子空间和不稳定子空间。稳定子空间、中心子空间和不稳定子空间均为不变子空间。在 E^s 和 E^u 上(5.7.7)的轨道分别具有收缩和扩张的特征。

设 z_0 为映射 M 的不动点, 在 z_0 处将式(5.7.6)线性化, 并进行坐标平移得到线性映射(5.7.7), 其中 $A = D_z M(z_0)$ 为在 z_0 处计算的雅可比矩阵。相应的 E^s, E^c 和 E^u 称为系统(5.7.6)的线性近似系统的稳定子空间、中心子空间和不稳定子空间。若 $D_z M(z_0)$ 的所有本征值模均不等于 1, 称 z_0 为双曲不动点; 若 $D_z M(z_0)$ 有模等于 1 的本征值, 称 z_0 为非双曲不动点。 $D_z M(z_0)$ 同时具有大于 1 和小于 1 的本征值模的不动点称为鞍点。

对于映射 M 的双曲不动点 z_0 , 可以定义其局部稳定流形和周部不

稳定流形

$$W_{\text{loc}}^s(z_0) = \{z \in U \mid \text{对一切 } k \geq 0 \text{ 有 } M^k(z) \in U, \\ \text{且当 } k \rightarrow \infty \text{ 时 } M^k(z) \rightarrow z_0\} \quad (5.7.8)$$

$$W_{\text{loc}}^u(z_0) = \{z \in U \mid \text{对一切 } k \geq 0 \text{ 有 } M^{-k}(z) \in U, \\ \text{且当 } k \rightarrow \infty \text{ 时 } M^{-k}(z) \rightarrow z_0\} \quad (5.7.9)$$

其中 U 为不动点的 z_0 某个邻域。双曲不动点 z_0 的全局稳定流形和全局不稳定流形定义为

$$W^s(z_0) = \bigcup_{k \geq 0} M^{-k}(W_{\text{loc}}^s(z_0)) \quad (5.7.10)$$

$$W^u(z_0) = \bigcup_{k \geq 0} M^k(W_{\text{loc}}^u(z_0)) \quad (5.7.11)$$

与非线性系统的情形类似,有下述不变流形定理。

映射双曲不动点的不变流形定理: 设 z_0 是系统(5.7.6)的双曲不动点,系统(5.7.6)在 z_0 附近的线性近似系统(5.7.7)有 n_s 维稳定子空间 E^s 和 n_u 维不稳定子空间 E^u , 且 $n_s + n_u = n$ 。则系统存在 n_s 维局部稳定流形 $W_{\text{loc}}^s(z_0)$ 和 n_u 维局部不稳定流形 $W_{\text{loc}}^u(z_0)$, 使得 $W_{\text{loc}}^s(z_0)$ 和 E^s , $W_{\text{loc}}^u(z_0)$ 和 E^u 在 z_0 分别相切。且若 M 具有 m 阶连续导数, 则 $W_{\text{loc}}^s(z_0)$ 和 $W_{\text{loc}}^u(z_0)$ 均为 C^m 微分流形。

类似于非线性系统,可定义映射的中心流形,也有相应的中心流形定理。

注意到映射 M 的 l 周期点是映射 M^l 的不动点,因此可以定义 M 的双曲周期轨道及其局部稳定流形和局部不稳定流形,并建立相应映射的双曲周期轨道的不变流形定理。

若 $p \in \Gamma$ 是庞加莱映射的双曲不动点,则闭轨 Γ 为双曲闭轨。可以用过 $W^s(p)$ 和 $W^u(p)$ 上各点的相轨迹构成闭轨 Γ 的稳定流形 $W^s(\Gamma)$ 和不稳定流形 $W^u(\Gamma)$, 如图 5.24 所示。若 $DP(p)$ 有 n_s 个本征值的模小于 1, n_u 个本征值的模大于 1 ($n_s + n_u = n - 1$), 则 $W^s(\Gamma)$ 和 $W^u(\Gamma)$ 的维数分别为 $n_s + 1$ 和 $n_u + 1$ 。可以证明,若双曲闭轨由 $x = \phi(t)$ 给

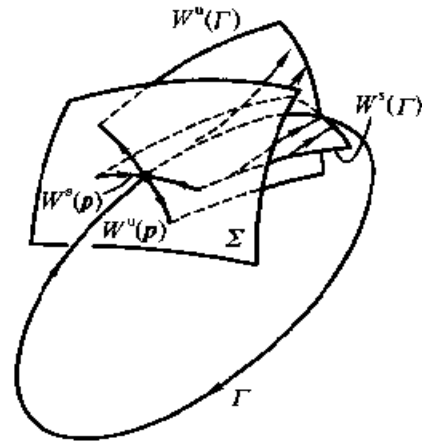


图 5.24 双曲闭轨的不变流形

出,其周期为 T ,在稳定流形 $W^s(\Gamma)$ 或不稳定流形 $W^u(\Gamma)$ 上任意点出发的相轨迹分别为 $x^s(t)$ 和 $x^u(t)$,则存在常数 $K>0, a>0$ 和 ε 使得

$$\left. \begin{aligned} \|x^s(t) - \phi(t + \varepsilon)\| &< Ke^{-at/T} & (t \geq 0) \\ \|x^u(t) - \phi(t + \varepsilon)\| &< Ke^{at/T} & (t \leq 0) \end{aligned} \right\} \quad (5.7.12)$$

5.7.4 映射不动点的分岔及相应的闭轨迹分岔

对于含参数的映射:

$$z_{i+1} = M(z_i, \mu) \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.7.13)$$

其中 $z \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量, $\mu \in \mathbb{R}^m$ 为分岔参数。当参数 μ 连续地变化时,若系统(5.7.13)轨道的拓扑结构在 $\mu = \mu_0$ 处发生突然变化,则称系统(5.7.13)在 $\mu = \mu_0$ 处出现分岔。 μ_0 称为分岔值或临界值。 (z_i, μ_0) 称为分岔点。在参数 μ 的空间 \mathbb{R}^m 中,由分岔值构成的集合称为分岔集。在 (z, μ) 的空间 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 中,不动点或周期轨道随参数 μ 变化的图形称为分岔图。

类似于前述微分方程定义的非线性系统的情形,根据侧重点的不同可以将映射的分岔作不同分类。例如静态分岔和动态分岔,局部分岔和全局分岔,通有分岔和退化分岔。

映射(5.7.13)的静态分岔问题是代数方程

$$z = M(z, \mu) \quad (5.7.14)$$

的多重解问题。设 μ_0 为一个静态分岔值, (z_F, μ_0) 为静态分岔点。基于式(5.7.14),利用隐函数定理可以导出映射(5.7.13)静态分岔的必要条件:在 (z_F, μ_0) 计算的 M 关于 z 的雅可比矩阵 $D_z M(z_F, \mu_0)$ 至少有一个绝对值为 1 的本征值,即 (z_F, μ_0) 为非双曲不动点。

根据上述映射静态分岔的必要条件,最基本的非双曲不动点分岔为下列三种情形之一:(1) $D_z M(z_F, \mu_0)$ 仅有一个本征值为 $\lambda = 1$,这类分岔称为切分岔或折叠分岔;(2) $D_z M(z_F, \mu_0)$ 仅有一个本征值为 $\lambda = -1$,这类分岔称为翻转分岔或倍周期分岔;(3) $D_z M(z_F, \mu_0)$ 有一对模为 1 的复本征值 $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$ ($0 < \varphi < \pi$),这类分岔称为内依马克(Y. Neimark)-沙克(R.J. Sacker)分岔或映射的霍普夫分岔。任何映射都可能出现切分岔或倍周期分岔,而内依马克-沙克分岔只可能在二维及更高维的映射中出现。

映射不动点的分岔与非线性系统平衡点的分岔有许多相似之处,也存在差别。以下仅给出低维映射分岔的若干例子。对于高维映射,可以应用中心流形定理将系统约化到以对应于绝对值为1本征值的本征向量为切向量的一维或二维中心流形上。

例 5.7-5 讨论映射

$$z_{i+1} = z_i + \mu z_i + z_i^3 \quad (a)$$

的分岔。

解:系统(a)的不动点由代数方程

$$z = z + \mu z + z^3 \quad (b)$$

给出。一维映射的雅可比矩阵的本征值等于式(a)右端函数的导数

$$\lambda = 1 + \mu + 3z^2 \quad (c)$$

系统在 $(z, \mu) = (0, 0)$ 处有 $\lambda = 1$,出现切分岔。当 $\mu < 0$ 时,有稳定不动点 $z_{F1} = 0 (\lambda < 1)$ 和两个不稳定不动点 $z_{F2,3} = \pm \sqrt{-\mu} (\lambda > 1)$;当 $\mu > 0$ 时,系统仅有不稳定不动点 $z_F = 0 (\lambda > 1)$ 。这种分岔为亚临界叉形分岔。若将式(a)中 z^3 项的符号“+”改为“-”,则发生超临界叉式分岔。

例 5.7-6 讨论映射

$$z_{i+1} = z_i + \mu + z_i^2 \quad (a)$$

的分岔。

解:系统(a)的不动点由代数方程

$$z = z + \mu + z^2 \quad (b)$$

给出。雅可比矩阵的本征值为

$$\lambda = 1 + 2z \quad (c)$$

系统在 $(z, \mu) = (0, 0)$ 处有 $\lambda = 1$,出现切分岔。当 $\mu < 0$ 时,有稳定不动点 $z_{F1} = -\sqrt{-\mu} (\lambda < 1)$ 和不稳定不动点 $z_{F2} = \sqrt{-\mu} (\lambda > 1)$;当 $\mu > 0$ 时,没有不动点。这种分岔为鞍结分岔。

例 5.7-7 讨论映射

$$z_{i+1} = z_i + \mu z_i - z_i^2 \quad (a)$$

的分岔。

解:系统(a)的不动点由代数方程

$$z = z + \mu z - z^2 \quad (b)$$

给出。雅可比矩阵的本征值为

$$\lambda = 1 + \mu - 2z \quad (c)$$

系统在 $(z, \mu) = (0, 0)$ 处, $\lambda = 1$, 出现切分岔。当 $\mu < 0$ 时, 有稳定不动点 $z_{F1} = 0 (\lambda < 1)$ 和不稳定不动点 $z_{F2} = \mu (\lambda > 1)$; 当 $\mu > 0$ 时, 系统有稳定不动点 $z_{F1} = \mu (\lambda < 1)$ 和不稳定不动点 $z_{F2} = 0 (\lambda > 1)$ 。这种分岔为跨临界分岔。

例 5.7-8 讨论映射

$$z_{i+1} = -z_i - \mu z_i + z_i^3 \quad (a)$$

的分岔。

解: 系统(a)的不动点由代数方程

$$z = -z - \mu z + z^3 \quad (b)$$

给出。雅可比矩阵的本征值为

$$\lambda = -1 - \mu + 3z^2 \quad (c)$$

系统在 $(z, \mu) = (0, -2)$ 处, $\lambda = 1$, 出现切分岔。当 $\mu < -2$ 时, 有不稳定不动点 $z_F = 0 (\lambda > 1)$; 当 $\mu > -2$ 时, 系统有稳定不动点 $z_{F1} = 0 (\lambda < 1)$ 和不稳定不动点 $z_{F2,3} = \pm \sqrt{2 + \mu} (\lambda > 1)$ 。这种分岔为叉形分岔。系统在 $(z, \mu) = (0, 0)$ 处, $\lambda = -1$, 出现倍周期分岔。当 $-2 < \mu < 0$ 时的稳定不动点 $z_{F1} = 0 (\lambda > 1)$ 在 $\mu > 0$ 后变成不稳定不动点, 不稳定不动点 $z_{F2,3} = \pm \sqrt{2 + \mu}$ 保持不变。进一步考察二次映射

$$z_{i+2} = z_i + \mu(2 + \mu)z_i - 2z_i^3 + O(z_i^4) \quad (d)$$

系统的雅可比矩阵的本征值为

$$\lambda = 1 + \mu(2 + \mu) - 6z^2 + O(z^3) \quad (e)$$

系统(e)在 $(z, \mu) = (0, 0)$ 发生叉形分岔, 当 $\mu > 0$ 时, 系统(d)除不稳定不动点 $z_{F1} = 0$ 外, 还有稳定不动点, 由 $z_{F2} = \mu(2 + \mu)/2 + O(z^3)$ 确定。分岔图如图 5.25 所示。注意到系统(d)的不动点是系统(a)的周期 2 点, 因此称系统(a)在 $(z, \mu) = (0, 0)$ 处出现倍周期分岔。

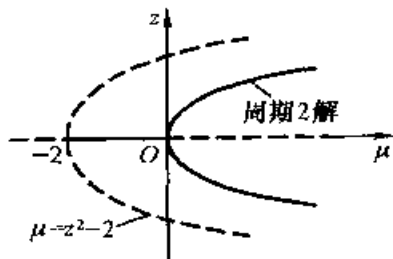


图 5.25 倍周期分岔

例 5.7-9 讨论二维映射

$$z_{1i+1} = \mu z_{1i}(1 - z_{2i}), \quad z_{2i+1} = z_{1i} \quad (\mu > 0) \quad (a)$$

的分岔。

解：系统(a)不动点由代数方程组

$$z_1 = \mu z_1(1 - z_2), \quad z_2 = z_1 \quad (\text{b})$$

给出,解出不动点 P_1 和 P_2 分别为

$$(z_{1F1}, z_{2F1}) = (0, 0), \quad (z_{1F2}, z_{2F2}) = \left(1 - \frac{1}{\mu}, 1 - \frac{1}{\mu}\right) \quad (\text{c})$$

在不动点 P_1 和 P_2 处,系统(a)相应的雅可比矩阵分别为

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 - \mu & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{d})$$

J_1 的本征值为 0 和 μ , J_2 的本征值为 $(1 \pm \sqrt{5-4\mu})/2$ 。当 $0 < \mu < 1$ 时, P_1 是稳定结点, P_2 是鞍点;当 $\mu > 1$ 时, P_1 是鞍点,而 $1 < \mu < 5/4$ 时 P_2 是稳定结点;因此在 $\mu = 1$ 处系统(a)出现鞍结分岔。注意到 $\mu = 2$ 时, J_2 的本征值为单位模复数 $e^{\pm \pi i/3}$ 。当 $5/4 < \mu < 2$ 时, P_2 是稳定焦点;当 $\mu > 2$ 时, P_2 是不稳定焦点。此时用数值方法可以发现存在一闭合稳定流形,如图 5.26 所示。因此在 $\mu = 2$ 处系统(a)出现内依马克-沙克分岔。

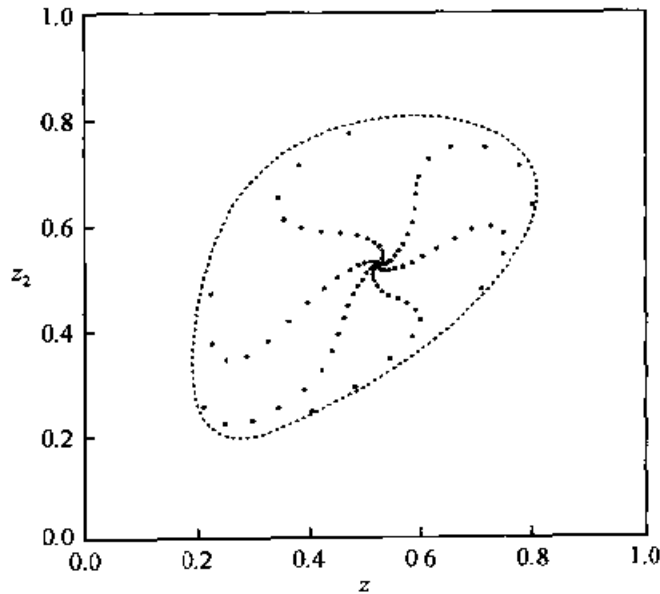


图 5.26 内依马克-沙克分岔的闭合稳定流形

在讨论非线性振动周期运动分岔时,可以研究相应的庞加莱映射的分岔。庞加莱映射切分岔对应的典型周期运动分岔是跳跃现象。在参数(在非线性受迫振动中是激励频率)的某个范围中,系统的稳定极限环和

不稳定极限环共存,在分岔点处两者对应的周期运动幅值相等,并突然同时消失,发生切分岔;由于在分岔点邻域内不存在其它周期运动,系统响应跳跃到离它们较远的另一稳定周期运动上。庞加莱映射的翻转分岔对应着周期运动的周期倍化。原来周期运动对应的闭轨迹失去稳定性,发生超临界翻转分岔,新的稳定闭轨迹为单侧曲面麦比乌斯(A.F.Mobius)带的边界。从参数变化到分岔值起,麦比乌斯带逐渐增加宽度,反映在庞加莱映射上是一个点变为两个点,且新形成的两个点间距离增加。庞加莱映射出现内依马克-沙克分岔,对应着周期运动向准周期运动的突然变化。准周期运动在相空间中对应于二维环面。这种分岔通常不严格地称为周期运动的霍普夫分岔,若原来的周期运动是由平衡点的霍普夫分岔产生的,这种分岔也称为二次霍普夫分岔。在某些特殊情形,庞加莱映射出现内依马克-沙克分岔,对应于周期运动向数倍于原周期的周期运动突然变化,新的闭轨迹环绕在二维环面上但并没有充满,这种情形称为锁相。

§ 5.8 分岔问题的数值方法

5.8.1 分岔问题数值方法概述

在分岔问题研究中,常需要讨论带参数的非线性代数方程

$$f(x, \mu) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^m \quad (5.8.1)$$

的解 x 随参数 μ 的变化。如果忽略状态变量与分岔参量的区别,引入增广的系统状态变量 $y = (x, \mu) \in \mathbb{R}^{n+m}$, 方程(5.8.1)可改写为

$$f(y) = 0 \quad y \in \mathbb{R}^{n+m} \quad (5.8.2)$$

方程(5.8.1)或(5.8.2)求解的主要困难在于解的多重性,这也正是分析分岔问题的关键所在。为突出问题的实质,在本节中,总是设方程(5.8.1)或(5.8.2)中的矢量值函数 $f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为充分光滑,且局限于讨论单参数系统,即 $m = 1$ 。此时方程(5.8.2)的解定义了空间 \mathbb{R}^{n+1} 中的光滑曲线。

为考察解的分岔性,需要了解在参数连续改变时解的变化过程。此时常采用延续算法求数值解。即从(5.8.1)的一个初始解点出发,以充分小的步长对解曲线进行连续跟踪,以得出解随参数变化的规律。在奇异点处,通常的延续算法往往失效,因此需要改进延续算法以处理分岔

问题。

用数值方法处理的分岔问题一般可分为三个方面:(1)改进延续算法实现对解曲线的跟踪;(2)判断和确定解曲线上的分岔点;(3)计算分岔点处的分岔方向,用于对分岔后的解曲线进行跟踪。这些问题也是非线性系统大范围数值分析的基本内容。

本书仅讨论静态分岔问题的数值方法。分岔问题的数值方法是非线性振动中的一个重要研究方向,可参阅文献[23,40,52,56,75,81,85]。

5.8.2 解曲线的数值追踪

为实现对解曲线的数值追踪,通常将代数方程(5.8.1)转化为常微分方程

$$\mathbf{D}_x f(x, \mu) \frac{dx}{d\mu} + \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial \mu} = \mathbf{0} \quad (5.8.3)$$

对于非奇异点, $\mathbf{D}_x f(x, \mu)$ 可逆, 方程(5.8.3)可改写为

$$\frac{dx}{d\mu} = - [\mathbf{D}_x f(x, \mu)]^{-1} \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial \mu} \quad (5.8.4)$$

若给定初值:

$$x(\mu_0) = x_0 \quad (5.8.5)$$

就可以利用常微分方程的数值解法求得方程(5.8.4)的过点 (x_0, μ_0) 的一条积分曲线,即方程(5.8.1)的解曲线。其有别于一般常微分方程数值求解之处在于积分曲线隐含在代数方程(5.8.1)中,可以适时地利用式(5.8.1)对求解过程进行修正。通常采用牛顿迭代方法

$$x_{k+1} = x_k - [\mathbf{D}_x f(x_k, \mu)]^{-1} f(x_k, \mu) \quad (5.8.6)$$

迭代的初值即取自微分方程(5.8.4)的近似解。由于近似解点与解曲线比较接近,可使误差得到控制。此过程称为预测-校正方法,即先由方程(5.8.4)从一点经过若干步后得到下一点的预测,再由原方程(5.8.1)对其进行修正,从而逐步获得方程(5.8.2)在空间 \mathbb{R}^{n+1} 中的解曲线。这种确定解曲线的思想称为延续原理。

由于在奇异点处矩阵 $\mathbf{D}_x f(x, \mu)$ 不可逆,上述延续方法失效。对于这种情形,可以引入一个辅助参数 s ,并增加一个约束方程,即引入

$$N(x, \mu, s) = 0 \quad (5.8.7)$$

与方程(5.8.1)联立。适当选择约束方程,可以使联立的方程组在非分岔点的奇异点处的 $n+1$ 阶雅可比矩阵

$$J = \begin{bmatrix} D_x f & \frac{\partial f}{\partial \mu} \\ D_x N & \frac{\partial N}{\partial \mu} \end{bmatrix} \quad (5.8.8)$$

成为非奇异。经常使用的辅助参数的几何意义相当于弧长,所补充的约束方程为

$$\theta \frac{dx^T}{ds}(x(s) - x(s_1)) + (1 - \theta) \frac{d\mu}{ds}[\mu(s) - \mu(s_1)] - (s - s_1) = 0 \quad (5.8.9)$$

其中 $\theta \in (0, 1)$ 可适当选择, s_1 处的 $x, \mu, dx^T/ds$ 和 $d\mu/ds$ 在前一步计算中已经求得。这种延续算法称为拟弧长算法。在分岔点处矩阵 J 仍为不可逆,但可以证明,关于方程(5.8.1)和(5.8.7)的牛顿迭代法仍可能收敛,其收敛范围是在以分岔点为顶点的某个锥体内。

5.8.3 分岔点的数值确定

分岔点均为奇异点,即在该点处 $D_x f(x, \mu)$ 或 $D_y f(y)$ 不可逆。但可以证明,若 $n \times (n+1)$ 阶矩阵 $D_y f(y)$ 至少有一个 $n \times n$ 阶子矩阵可逆时,奇异点不是分岔点。这种非分岔点的奇异点称为转折点。在分岔点处, $D_y f(y)$ 的所有 $n \times n$ 阶子矩阵均为不可逆的。数值确定分岔点时,往往首先确定奇异点,然后再进行分岔点和转折点的区分。

为确定奇异点,需要引入某种测试函数 τ 。测试函数 τ 有不同的选取方法。例如 τ 可以取自 $D_x f(x, \mu)$ 诸本征值实部中的最大者, τ 改变符号表明出现奇异点。或取自 $D_x f(x, \mu)$ 诸本征值实部绝对值的最小者, τ 出现零点表示奇异点。 τ 的一种自然的选择是 $D_x f(x, \mu)$ 的行列式绝对值,即 $\tau(x, \mu) = |\det(D_x f(x, \mu))|$, $\tau(x, \mu)$ 取最小值 0 表示,奇异点 (x, μ) 。

在连续追踪解曲线时,可以不间断地得到其上相邻的 3 个点 $y_i (i = 0, 1, 2)$, 并计算相应的 $\tau(y_i)$ 。若在 y_0 与 y_2 之间存在奇异点,则有 $\tau(y_1) < \tau(y_0), \tau(y_2)$ 。将 y_0 和 $y_j (j = 1, 2)$ 之间的弧长记作 s_j 。在 y_i 上作抛物线插值:

$$y(s) = \frac{(s - s_1)(s - s_2)}{s_1 s_2} y_0 + \frac{s(s_2 - s)}{s_1(s_2 - s_1)} y_1 + \frac{s(s - s_1)}{s_2(s_2 - s_1)} y_2$$

$$s \in [0, s_2] \quad (5.8.10)$$

采用对分法确定极小点的初次近似。即取 $s' = s_1/2$ 和 $s'' = (s_1 + s_2)/2$, 然后分别代入式(5.8.10), 得到 $y(s')$ 和 $y(s'')$ 。比较 $\tau(y(s'))$, $\tau(y_1)$ 和 $\tau(y(s''))$, 其值为最小的弧长 s_1^* 给出奇异点的初次近似 $y(s_1^*)$ 。利用这种方法可以得到新的 3 个相邻的初次近似点 y_i^* ($i=0, 1, 2$)。3 个 $\tau(y_i^*)$ 的最小值小于 $\tau(y_i)$ 的最小值。重复上述过程, 直到求出有足够精度的极小点, 即为奇异点 $y^* = y(s^*)$ 。在 y^* 点计算 $D_y f(y)$ 的 $n+1$ 个 n 阶代数余子式所构成的向量:

$$v = (J_1 \ J_2 \ \cdots \ J_{n+1})^T \quad (5.8.11)$$

其中

$$J_i = (-1)^{i+1} \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_{i-1}} & \frac{\partial f}{\partial y_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_{n+1}} \end{bmatrix} \\ (i = 1, 2, \cdots, n+1) \quad (5.8.12)$$

若 v 的模 $\|v\|$ 足够小, 则 y^* 为分岔点。若 $\|v\|$ 较大而 $\tau(y)$ 充分小, 则 y^* 为转折点。

5.8.4 分岔方向的确定

在分岔点 (x_0, μ_0) 处, 分岔方向一般多于一个。为确定分岔方向, 计算 $(dx, d\mu)$ 使得

$$f(x_0 + dx, \mu_0 + d\mu) = 0 \quad (5.8.13)$$

得到分岔点处的分岔方向便得到解曲线上离开分岔点的某个新点 $(x_0 + dx, \mu_0 + d\mu)$, 通常不是奇异点。因此从该点出发, 可利用延续算法继续沿指定方向的一支解曲线作追踪计算。

如前所述, $y_0 = (x_0, \mu_0)$ 为分岔点时有 $f(y_0) = 0$ 和 $v(y_0) = 0$ 。可以证明, 在点 y_0 处, 式(5.8.11)定义的向量 v 的雅可比矩阵 $D_y v(y_0)$ 的单重非零实本征值所对应的本征方向即为该点处的分岔方向。因此分岔方向可以由线性本征值问题。

$$D_y v(y_0)u = \lambda u \quad (5.8.14)$$

确定。这一结论仅能计算 $D_y f(y_0)$ 的零空间维数 $m=2$ 的情形。若 $m > 2$, $D_y f(y_0)$ 的秩小于 $n-1$, 其所有 $(n-1) \times (n-1)$ 子矩阵的行列式均为零, 根据式(5.8.11)的定义, $D_y v(y_0)$ 的所有元素为零, 没有非零本

征值。利用中心流形定理约化,可以通过分析 $D_y v(y_0)$ 的零空间简化本征值问题(5.8.14)。设 $D_y f(y_0)$ 的零空间由 ϕ_1 和 ϕ_2 张成,则分岔方向在零空间内,可写为

$$u = \xi_1 \phi_1 + \xi_2 \phi_2 = \Phi \xi \quad (5.8.15)$$

其中 $(n+1) \times 2$ 矩阵 $\Phi = (\phi_1 \ \phi_2)$, $\xi = (\xi_1 \ \xi_2)$ 。定义 2×2 矩阵 $A = \Phi^T D_y v(y_0) \Phi$, ξ 可以由求解本征值问题

$$A\xi = \lambda\xi \quad (5.8.16)$$

得到,利用式(5.8.15)可确定分岔方向。若 $m > 2$,分岔方向的确定更为复杂。

过分岔点后的解曲线上的点也可采用代数方法得到。设 $D_y f(y_0)$ 的零空间由 $\phi_k (k=1, 2, \dots, m)$ 张成。若在分岔点 y_0 的小邻域内有

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^m \xi_i \phi_i \quad y \in S_\epsilon(y_0) \quad (5.8.17)$$

则方程(5.8.2)的解使相应的 $\|f\|^2 = f^T f$ 取最小值,其中 $S_\epsilon(y_0)$ 是以 y_0 为中心,以小正数 ϵ 为半径,且位于 $D_y f(y_0)$ 的零空间中的 m 维球面。因此,求解方程(5.8.2)的问题转化为求解泛函 $f^T f$ 的极小值问题:

$$\min_{y \in S_\epsilon(y_0)} f^T f(y) \quad (5.8.18)$$

采用拉格朗日乘子法,问题(5.8.18)等价于求解

$$\begin{aligned} \Phi^T (D_y f(y))^T f(y) + \beta \xi &= 0 \\ \sum_{i=1}^m \xi_i^2 - \epsilon^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.8.19)$$

其中 $\Phi = (\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_m)$, $\xi = (\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_m)^T$ 。方程(5.8.19)是关于 $m+1$ 个未知量 $(\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_m, \beta)$ 的代数方程组,可以用数值方法求解。

习 题

5.1 试讨论平面系统

$$\dot{x} = \mu x - x^3 + xy^2, \quad \dot{y} = -y - y^3 - x^2 y$$

的静态分岔。

5.2 试讨论平面系统

$$\dot{x} = \mu y + xy, \quad \dot{y} = -\mu x + x^2 + y^2$$

的静态分岔。

5.3 试讨论平面系统

$$\dot{x} = \mu y - y^2, \quad \dot{y} = x - 2y + 0.5x^2$$

的静态分岔。

5.4 试用 LS 约化建立平面系统

$$\dot{x} = \mu x + xy - x^3, \quad \dot{y} = y + x^2 - y^2$$

的约化方程,并讨论静态分岔。

5.5 试用 LS 约化证明平面系统

$$\dot{x} = (2 - \mu)x - 2y + 2x^2 + 2y^2, \quad \dot{y} = (1 - 3\mu)x - y + xy + y^2$$

在零点邻域存在叉式分岔。

5.6 试确定平面系统

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y + x^2$$

的平衡点及其不变流形,并验证双曲平衡点的不变流形定理。

5.7 试计算平面系统

$$\dot{x} = xy + ax^3 - bxy^2, \quad \dot{y} = -y + cx^2 + dx^2y$$

的中心流形,用中心流形定理导出约化系统,证明当 $a + c > 0$ 时零解不稳定。

5.8 试计算三维系统

$$\dot{x} = -y + xz - x^4, \quad \dot{y} = x + yz + xyz, \quad \dot{z} = z - (x^2 + y^2) + z^2 + \sin x^2$$

的中心流形,用中心流形定理导出约化系统,判断零解的稳定性。

5.9 试用中心流形定理导出习题 5.4 中平面系统的约化系统,并讨论静态分岔。

5.10 试确定系统

$$\dot{x} = 3x + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + \cdots, \quad \dot{y} = y + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + \cdots$$

的三阶 PB 范式,其中省略号表示高于 2 次的项。

5.11 试确定系统

$$\dot{x} = 3y - x^2 + 7xy + 7y^2, \quad \dot{y} = 2x + 4xy + y^2$$

的二阶 PB 范式,并写出所用的变换。

5.12 试确定系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \tilde{f}(x) \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}(x) = o(x) \end{cases}$$

的三阶 PB 范式。

5.13 试确定杆件-弹簧系统势函数

$$V(x, \mu) = 0.5x^2 + 2\mu(\cos x - 1)$$

的 GS 范式,并讨论静态分岔。

5.14 试讨论平面系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x \left[1 - \mu - \frac{\mu}{1 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2} \right], \\ \dot{y} &= x + y \left[1 - \mu - \frac{\mu}{1 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2} \right]\end{aligned}$$

的分岔。

5.15 试应用霍普夫分岔定理讨论非线性振动系统

$$\ddot{x} + (x^2 - \mu)\dot{x} + 2x + x^3 = 0$$

的霍普夫分岔。

5.16 试确定系统

$$\dot{x} = q - (\mu + 1)x + x^2y, \quad \dot{y} = \mu x - x^2y \quad (q > 0)$$

平衡点的稳定性和分岔。

5.17 以 xz 平面为截面,试确定三维系统

$$\dot{x} = x - \omega y - x\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \dot{y} = \omega x + y - y\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \dot{z} = cx$$

的庞加莱映射。利用庞加莱映射证明系统当 $c > 0$ 时存在稳定闭轨迹。

5.18 试参考平面霍普夫分岔定理建立映射的内依马克-沙克分岔及其稳定性的判断方法,并利用所得到的结论重新讨论例 5.7~9。

第六章 混沌振动

以上各章的分析表明,线性系统与非线性系统存在许多本质差别。例如,线性系统受周期激励时,只产生同频周期响应;而非线性系统除同频响应外,还产生超谐波和亚谐波响应。又例如,无阻尼线性系统的自由振动周期与初始值无关;而非线性系统的自由振动周期与初始值有关。但前而仅讨论了非线性系统的周期运动,此外,非线性系统还可能出现更为复杂的振动现象,这便是本章讨论的混沌振动。

混沌振动是一种由确定性振动系统产生,对于初始条件极为敏感而具有内禀随机性和长期预测不可能性的往复非周期运动。关于混沌振动的研究已成为非线性振动中一个蓬勃发展的新领域。它不仅对数学、物理、力学的各个分支有重大促进,而且也为化学、生物学、生态学、经济学等学科提供一种分析问题的全新思路,甚至对人类认识自然界的一些基本概念如因果性、决定论、随机性等也有深刻启示。随着混沌理论研究的深入,其工程应用也日益受到重视。绪论中已说明工程问题中广泛存在着非线性因素,在适当的参数和初值条件下,系统可能出现混沌振动。

本章叙述混沌振动的基础知识和若干研究进展。首先概述混沌振动的涵义、几何特征和产生混沌的途径,举例说明工程问题中的混沌振动,然后讨论混沌振动的数值识别、解析预测和控制等问题。

§ 6.1 混沌振动概述

6.1.1 混沌振动的概念

混沌是非线性系统特有的一种运动形式,是产生于确定性系统的敏感依赖于初始条件的往复性稳态非周期运动,类似于随机振动而具有长期不可预测性。非线性振动系统中的混沌称为混沌振动,也简称为混沌。

混沌的基本特征是具有对初始条件的敏感依赖性,即初始值的微小差别经过一定时间后可导致系统运动过程的显著差别。这种对初始条件的敏感依赖性称为初态敏感性。

混沌还必须是往复的稳态非周期性运动,这是非线性系统的又一特征。在无限时间历程中,确定性线性系统的非周期性运动(即周期运动、准周期运动和拟周期运动之外的运动)都不是往复的稳态运动。如强阻尼线性振动趋于静止,而无阻尼线性受迫振子共振时的运动发散到无穷。非线性系统则不同,它可能存在往复但非周期性的运动。

混沌的这种往复的非周期性运动看上去似乎无任何规律可循,完全类似于随机噪声,而且采用传统的相关分析和谱分析等信号处理技术也无法将混沌信号与真正的随机信号区分。值得注意的是,这种类似随机的过程产生于完全确定性的系统。因此,混沌具有内禀随机性,也称为自发随机性。

混沌的另一特征是长期预测的不可能性,这又有别于完全不可预测的真正随机过程。现实中的任何物理量都只能以有限精度被量测,无穷高精度在物理世界中是不存在的。因此在初值中存在着不确定因素。可以认为,具有初态敏感性的系统对于初值误差的作用不断进行放大。随着时间的流逝,初始条件中的不确定因素起着愈来愈大的作用。一段时间以后决定运动的已不是初始条件中以有限精度给定的部分,而是在精度范围之外无法确定而又必然存在的误差,运动的预测便成为不可能了。由于初态敏感性而具有的不可长期预测性,被形象地称为蝴蝶效应。一个蝴蝶的振翅,导致大气状态极微小的变化,但在几天后,千里之外的一场本来没有的大风暴发生了。蝴蝶效应是混沌的一个生动描述。

综上所述,混沌振动是非线性系统特有的一种振动形式,是产生于确定性系统的敏感依赖于初始条件的往复性非周期运动,类似于随机振动而具有长期不可预测性。

例 6.1-1 上田振子的初值敏感性和内禀随机性^[33]

解:上田振子在 1978 年研究了一类非线性弹簧和线性阻尼组成的质量-弹簧系统在简谐激励作用下的受迫振动。弹性恢复力 F 与变形 x 的关系为 $F = kx^3$, 动力学方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx^3 = F_0 \cos \omega t \quad (a)$$

给定其中参数

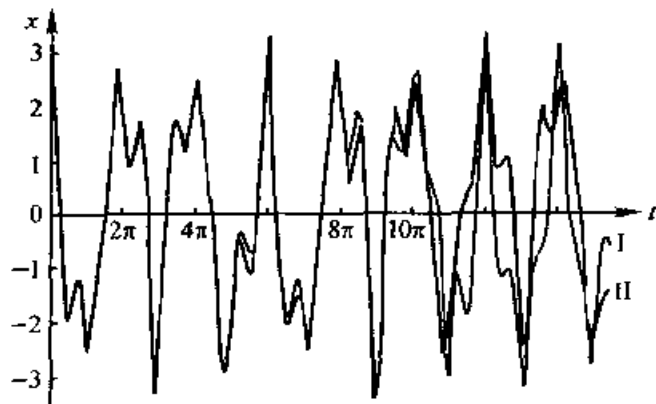
$$m = 1.0, \quad c = 0.05, \quad k = 1.0, \quad F_0 = 7.5, \quad \omega = 1.0 \quad (b)$$

再取差别不大的两组初始位置和速度

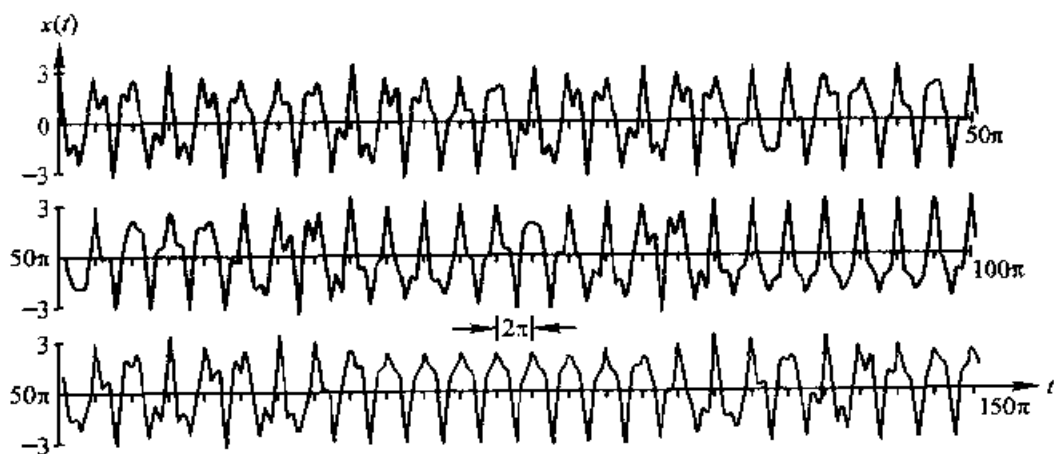
$$x_1(0) = 3.0, \quad \dot{x}_1(0) = 4.0 \quad (c)$$

$$x_1(0) = 3.01, \quad \dot{x}_1(0) = 4.02 \quad (d)$$

用电子计算机计算其位移时间历程, 即位移 x 随时间 t 变化的规律, 如图 6.1a 所示。可以看出, 10^{-2} 量级的初始误差经过 50 s 后扩大为 10^0 量级的差别。继续计算确定性非线性系统 a 的长期运动时间历程, 如图 6.1b 所示, 看上去完全类似于随机噪声。



(a) 初值的敏感依赖性



(b) 长期时间历程

图 6.1 上田振子的运动

6.1.2 混沌振动的几何特征

混沌振动的往复非周期特性可以利用相平面图的几何方法表示出来。周期运动每隔一个周期就要重复以前的运动, 即存在常数 T 满足 $x(t) = x(t + T)$ 。这时易证 $\dot{x}(t) = \dot{x}(t + T)$, 故周期运动的相轨迹曲线

是闭曲线。混沌不具有周期性,因而混沌振动的相轨迹曲线是不封闭的曲线,而运动的往复性则反映在相轨迹曲线局限于一有界区域内,不会发散到无穷远。

当周期运动的周期很长时,仅根据相平面图难以区分周期运动和混沌振动。庞加莱映射能更好地刻画混沌的往复非周期特性。如果庞加莱映射既不是有限点集也不是封闭曲线,则对应的运动可能是混沌振动。进一步区分,如果系统没有外部噪声扰动又存在阻尼因素,则庞加莱映射的结果将是具有某种细致结构的点集。如果系统受外噪声扰动或阻尼很小,庞加莱映射的结果将是模糊一片的点集。这里所称的细致结构,是指相继将点集的某一局部放大以后都具有与整体类似的几何结构。也就是说,确定性有阻尼系统混沌振动的庞加莱映射是具有自相似结构的点集。由于庞加莱映射的分辨率高于相平面图,故庞加莱映射更经常被采用。

例 6.1-2 上田振子的相平面图和庞加莱映射。

解:例 6.1-1 中式(a)在式(b)给定的参数下,对应于初值(3,4)和(3.1,4.1)的相平面曲线如图 6.2 所示^[33]。从中可以更全面地看出系统状态对初值的敏感依赖性。相应的庞加莱映射如图 6.3 所示。

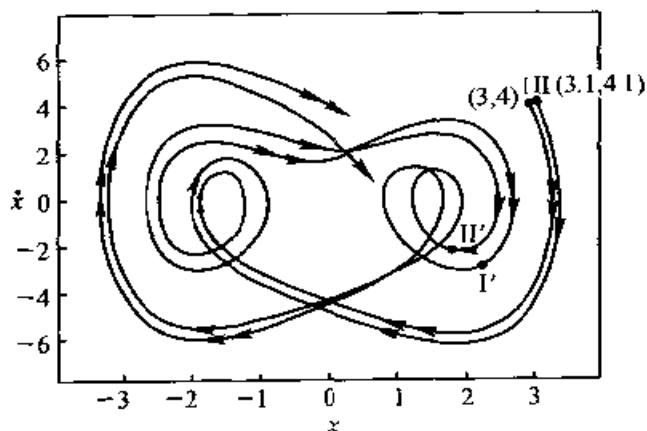


图 6.2 上田振子的两条相平面曲线

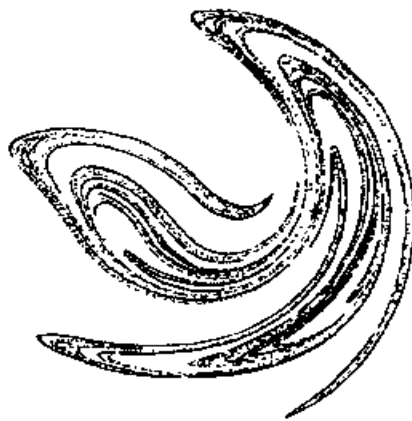


图 6.3 上田振子的庞加莱映射

对于描述多自由度系统运动的高维系统,几何结构不再有直观的图示,因此需要采用数值方法识别混沌运动。

6.1.3 产生混沌振动的途径

除以上静态地考察混沌的物理概念和几何特征以外,还必须动态地

讨论系统随着参数变化而呈现混沌振动的过程,即产生混沌振动的途径。研究产生混沌振动的途径,在理论上有助于深化人们对混沌振动出现过程的理解,明确混沌振动出现的机理。在实践中发现产生混沌振动的途径也是识别混沌振动,特别是将混沌振动与随机振动区分的有效方法。对于出现往复非周期不规则运动的系统,如果随着参数的改变呈现出产生混沌的途径,则一般可以认为该系统是混沌振动,而非随机振动。

倍周期分岔是一种广泛存在的产生混沌振动的典型途径。设系统有参数 μ ,只考虑单参数并不失一般性。当系统有多个参数时,可以设定其余参数而仅让其中一个变化。如果 $\mu = \mu_0$ 时系统的稳态振动有周期 T ,随着 μ 变化到 $\mu = \mu_1$ 时,稳态振动变为周期 $2T$,这种运动性质的突然改变即是倍周期分岔。一般地, $\mu = \mu_k$ 时稳态振动的周期为 $2^k T$,则 $\mu = \mu_{k+1}$ 时,稳态振动变为周期 $2^{k+1} T$ 。由于周期不断加倍,最后变为周期无穷大的运动,也就是非周期运动。从庞加莱映射可观察到:1 个点变为 2 个点,2 个点变为 4 个点,等等,随着倍周期分岔的不断出现,最终变为无穷点集,周期运动相应地转化为混沌运动。值得注意的是,倍周期分叉值 μ_i 所构成无穷序列 $\{\mu_i\}$ 的差商极限:

$$\delta = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mu_m - \mu_{m-1}}{\mu_{m+1} - \mu_m} \quad (6.1.1)$$

是一个常数,而且几类不同的系统可能有相同的常数,因此被称为普适常数。普适常数的存在反映了倍周期分岔产生混沌途径的特点。倍周期分岔产生混沌这一途径是 1978 年由费根鲍姆(F. J. Feigenbaum)对映射的研究所发现,并引起人们广泛注意。

例 6.1-3 达芬振子

$$\ddot{q} + c\dot{q} - q + q^3 = f \cos \omega t \quad (a)$$

倍周期分岔进入混沌。^[80]

解: 给定 $c = 0.3$ 和 $\omega = 1.2$,令 f 逐渐增加,系统的运动出现倍周期分岔而产生混沌。当 $f = 0.20$ 时,有 $T = 2\pi/\omega$ 周期运动;当 $f = 0.27$ 时,有 $2T$ 周期运动;当 $f = 0.28$ 时,有 $4T$ 周期运动;当 $f = 0.2867$ 时,有 $8T$ 周期运动;当 $f = 0.32$ 时,出现混沌运动;相轨迹如图 6.4。

阵发性是又一种典型的混沌产生途径。这里的阵发性,是指系统较

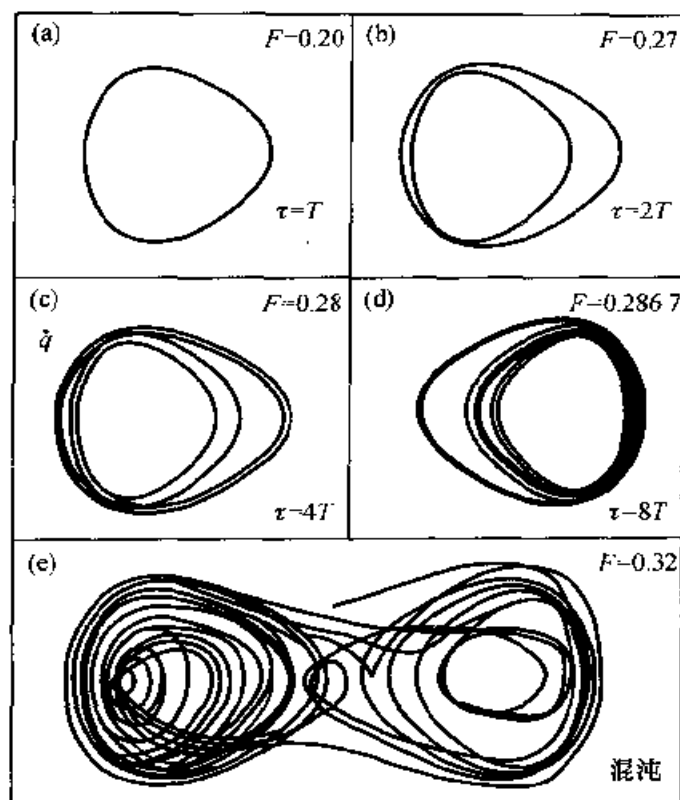


图 6.4 倍周期分岔的相轨迹

长时间尺度的规则运动和较短时间尺度的无规则运动的随机交替变化现象。阵发性的概念起源于湍流理论,描述流场中在层流背景上湍流随机爆发的现象,表现为层流和湍流相交而使相应的空间区域随机地交替。若振动系统在特定参数下呈现阵发性,随着参数的变化,阵发性中无规则运动突发得越来越频繁,系统便由周期运动转化为混沌运动。产生混沌的阵发性途径由玻莫(Y. Pomeau)和曼尼维尔(P. Manneville)于1980年首先研究。伴随产生混沌的阵发性途径也具有普适特性。

例 6.1-4 一类磁性刚体航天器在地球近赤道平面圆轨道运动时姿态运动动力学方程为

$$\ddot{\varphi} + \gamma \dot{\varphi} + K \sin 2\varphi + \alpha(2\sin \varphi \sin t + \cos \varphi \cos t) = 0 \quad (a)$$

其中存在阵发性响应。^[130]

解: 给定 $K=1.1$ 和 $\alpha=0.7$, 当 $\gamma=0.290, 0.280$ 时, 系统响应呈现阵发性, 如图 6.5 所示。

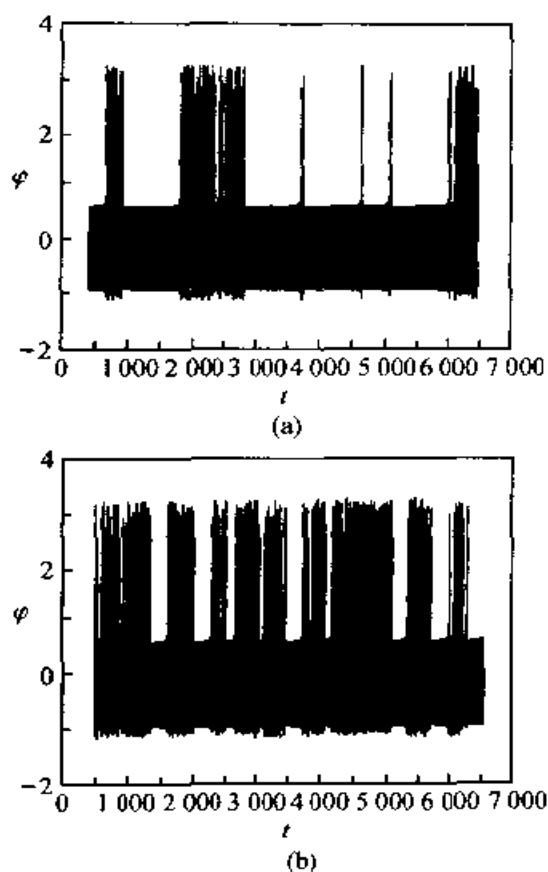


图 6.5 阵发性响应

准周期环面破裂也是一种典型的混沌产生途径。初始处于平衡状态的系统当参数变化通过某一临界值后,可能由平衡转变为周期运动,这种运动性质的突变即前面讨论过的霍普夫分岔。参数继续变化,系统再经历分岔而出现耦合的极限环而成为环面。若两个极限环代表的周期运动的频率不可有理通约,则系统作准周期运动。庞加莱映射为分布在一闭曲线上的点集。在这类系统中,参数的变化可能导致环面破裂而出现混沌,庞加莱映射显示原来的闭曲线断开为不在封闭曲线上的无穷点集。对于分岔导致准周期环面破裂而进入混沌这一途径的认识有不断深化的过程。在 1942 年霍普夫建立其分岔理论不久,朗道(L. D. Landau)于 1944 年在研究湍流机制时,猜测无穷多次分岔导致无数多频率的准周期运动形成湍流。1971 年茹厄勒(D. Ruelle)和塔肯斯(F. Takens)证明,只需要 4 次霍普夫分岔形成的准周期运动即可以逼近混沌运动。具有 4 个不可有理通约的准周期运动一般是不稳定的,受扰动后可能转变为混沌

运动。1978年纽豪斯(S. E. Newhouse)进一步将结果改为具有3个不可有理通约的准周期运动不稳定而导致混沌运动。同年斯文尼(H. L. Swinney)和郭勒卜(J. P. Gollub)在同轴内外两个转动柱体间流体实验中发现,仅有2个不可有理通约的准周期运动不稳定可直接导致混沌运动。1983年格鲍吉(C. Grebogi)、奥特(E. Ott)和约克(J. A. Yorke)证明,具有3个不可有理通约的准周期运动一般是稳定的,进而提出了2次分岔进入混沌的途径。1982年以来,费根鲍姆等分析了这种产生混沌途径的普适性特征。与其它途径相比,对准周期环面破裂产生混沌途径的认识还不充分。

例 6.1-5 一类几何非线性粘弹性梁运动的简化动力学模型为

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \beta \dot{q} + \omega^2(1 - \epsilon \cos \omega t)q + \omega^2[\epsilon \omega \sin \omega t + \beta a(1 - \epsilon \cos \omega t)]q + \\ \frac{3}{8}\omega^2 a^2(1 - 3\epsilon \cos \omega t)q^2 \dot{q} + \\ \frac{1}{8}\omega^2 a^2[3\omega \epsilon \sin \omega t + \beta a - \beta(1 - 3b)\epsilon \cos \omega t]q^3 \\ = F(\omega \sin \omega t - \beta \cos \omega t) \end{aligned} \quad (a)$$

其中存在准周期环面破裂进入混沌的途径。^[96]

解: 给定 $a = 0.1$, $b = 0.9$, $\omega = 1.0$, $\alpha = 2.8284$, $\epsilon = 0.01$ 和 $F = 34.4964$, 令 β 变化。当 $\beta = 0.000001$ 时系统(a)存在准周期环面,在庞加莱映射图上为封闭曲线。当 $\beta = 0.0001$ 时,准周期环面开始破裂。当 $\beta = 0.025$ 时,出现混沌运动。相应的庞加莱映射图 6.6 所示。

混沌还可能随参数变化而突然出现或消失。混沌突然出现或消失的机理之一为激变,即混沌吸引子的突然出现或消失。1982年格列鲍吉,奥特和约克分析了出现混沌的激变途径。根据激变的性质可将其概括为三种类型。混沌吸引子的突然消失称为边界激变,它产生于混沌吸引子在其盆边界上与不稳定周期轨道碰撞。混沌吸引子在相空间中的尺寸突然增大称为内部激变,它产生于混沌吸引子在其吸引盆内部与不稳定周期轨道碰撞。多个混沌吸引子合并为一个混沌吸引子称为吸引子合并激变,它产生于多个混沌吸引子同时在盆边界上与不稳定周期轨道碰撞。当系统参数反方向变化时,边界激变导致混沌吸引子的突然出现,内部激变导致混沌吸引子的尺寸突然减小,吸引子合并激变导致一个吸引子分

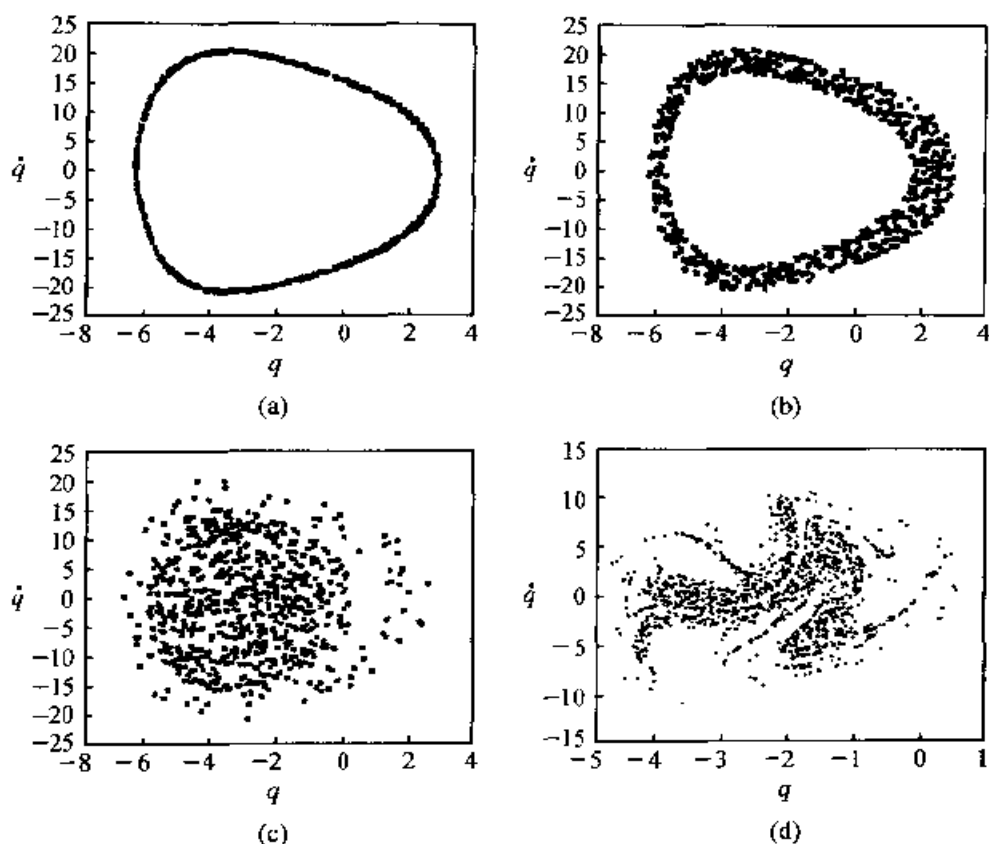


图 6.6 粘弹性梁准周期环面破裂进入混沌的庞加莱映射

裂成为若干个吸引子。

在边界激变的情形,随着系统参数 μ 的变化,不妨设 μ 为增加,混沌吸引子与其盆边界的距离减小。在临界值 $\mu = \mu_c$ 处,吸引子与其盆边界接触,而盆边界是不稳定周期轨道的稳定流形。当 $\mu > \mu_c$ 时,混沌吸引子不再存在,而形成瞬态混沌。若 μ 仅略大于 μ_c ,则从原来 ($\mu < \mu_c$ 时) 存在的混沌吸引子的吸引盆中出发的相轨迹,经过相对长时间的不规则运动(类似于 $\mu < \mu_c$ 时的混沌)的过渡以后,趋向于另外的吸引子。研究发现,瞬态混沌的平均持续时间 $\langle \tau \rangle$ 满足

$$\langle \tau \rangle \propto (\mu - \mu_c)^{-\gamma} \quad (6.1.2)$$

其中 γ 称为激变临界指数。对于不同类型的混沌吸引子, γ 取不同的数值。若参数变化的方向相反,边界激变也可以导致混沌吸引子突然出现。因此,边界激变也是产生混沌的途径之一。

在内部激变的情形,设随着系统参数 μ 增大而通过临界值 μ_c 时,混

沌吸引子突然变大。在 μ 略大于 μ_c 时,新形成混沌吸引盆内的相轨迹在一段长时间内仍局限于内部激变前的混沌吸引盆内。在这段时间以后,相轨迹突然离开原来的混沌吸引子而不规则地在变大的新的混沌吸引盆内游荡,称为爆发。然后又回到原来的混沌吸引子,如此循环。爆发之间的时间是随机的,但平均时间 $\langle \tau \rangle$ 满足式(6.1.2)。这种现象称为阵发性爆发。

在吸引子合并激变的情形,设在 $\mu < \mu_c$ 时有两个吸引子,二者的吸引盆由盆边界分隔开,随着系统参数 μ 的增大,在 $\mu = \mu_c$ 处,两个吸引子同时在盆边界上碰撞。在 μ 略大于 μ_c 时,新形成混沌吸引盆内的相轨迹在一段长时间内仍局限于吸引子合并激变前的一个混沌吸引盆内。在这段时间以后,相轨迹突然离开原来的混沌吸引子,而转向吸引子合并激变前的另一个混沌吸引子。然后又回到原来的混沌吸引子,如此循环。这种现象称为阵发性交换。阵发性爆发和阵发性交换统称为激变诱导的阵发性。激变诱导的阵发性与产生混沌的阵发性途径不同,不是较长时间尺度的规则运动和较短时间尺度的无规则运动的随机交替变化,而是不同无规则运动的随机交替变化。如果系统受外部噪声作用,则即使系统参数未达到激变的临界值,系统也可能由于外部噪声的存在而发生激变。这种激变称为噪声诱导的激变。

以上讨论了系统产生混沌振动的倍周期分岔、准周期环而破裂和阵发性种基本途径,也描述了产生混沌振动的激变途径。这几种途径的存在已得到数值计算的验证和实验室实验的证实。对于具体的系统,多种产生混沌的途径可能共存。此外,由于混沌振动的复杂性,还存在其它产生混沌振动的途径。因此,对于有往复非周期不规则运动出现的系统,即使参数的改变并未出现上述产生混沌振动的途径,也不能由此断定系统不发生混沌振动。

6.1.4 混沌概念的拓广

随着对混沌研究的深入,可以从不同的角度对混沌概念进行拓广。

前述混沌概念是针对非线性系统的稳态运动而言,但一些非线性系统可能具有很长的过渡性动力学行为,最后呈现周期性的稳态运动。这种相当长的过渡过程若为具有初态敏感性的往复非周期运动,可称为暂态混沌。在系统达到稳态运动之前,暂态混沌与真正的混沌极难区分。

弹性体和流体等分布参数力学系统的自由度数为无穷多,因而称为无穷维系统。无穷维系统的运动不仅与初值条件有关,而且与边界条件有关。若无穷维系统的动力学行为对边界条件具有敏感性,称这种运动为空间混沌。若无穷维系统的动力学行为在时间维度和空间维度上都具有混沌特性,称这种运动为时空混沌。

通常理解的混沌为确定性系统的一种动力学行为,然而随机非线性系统特别是受小随机噪声扰动的非线性系统也可能出现类似混沌的运动。随机非线性系统中具有初态敏感性的运动称为随机混沌。

§ 6.2 工程中的混沌振动

6.2.1 人造卫星的姿态运动^[57]

设人造卫星沿椭圆轨道运动,轨道的半轴参数为 p ,偏心率为 e ,地球的引力常数为 μ ,以真近地点角 ν 确定卫星在轨道上的位置(图 4.9)。卫星绕与轨道平而法线 Z 平行的主轴 z 作大幅度平面摆动,摆角为 φ (图 4.10)。卫星的主转动惯量为 A, B, C ,不失一般性,设 $B > A$ 。考虑与摆动角速度成正比的结构内阻尼,比例系数为 c 。利用式(4.2.11)表示的轨道运动规律,列写卫星的平面摆动动力学方程,并利用式(4.2.12)变换为以 ν 为自变量,得到

$$\varphi'' + \left[\frac{\delta - 2e \sin \nu (1 + e \cos \nu)}{(1 + e \cos \nu)^2} \right] \varphi' + \left(\frac{K}{1 + e \cos \nu} \right) \sin 2\varphi = 0 \quad (6.2.1)$$

其中

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{d\nu}, \quad \varphi'' = \frac{d^2\varphi}{d\nu^2}, \quad \delta = \frac{c}{C} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}}, \quad K = \frac{3(B-A)}{2C} \quad (6.2.2)$$

给定 K 和 δ , 改变 e 值, 系统由倍周期分岔进入混沌状态。如图 6.7 所示, $e=0.1$ 时有周期解, $e=0.132$ 时有 2 周期解, $e=0.145$ 时有 4 周期解。 $e=0.147$ 时为混沌振动, 其相轨迹和庞加莱映射如图 6.8 所示。

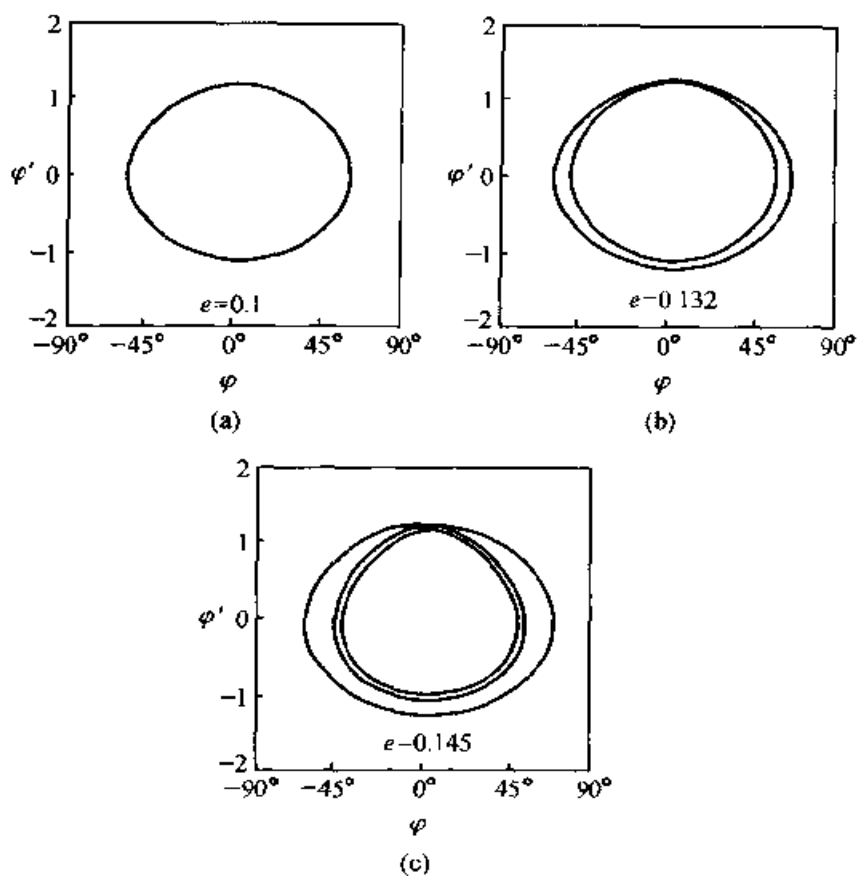


图 6.7 姿态运动的倍周期分岔

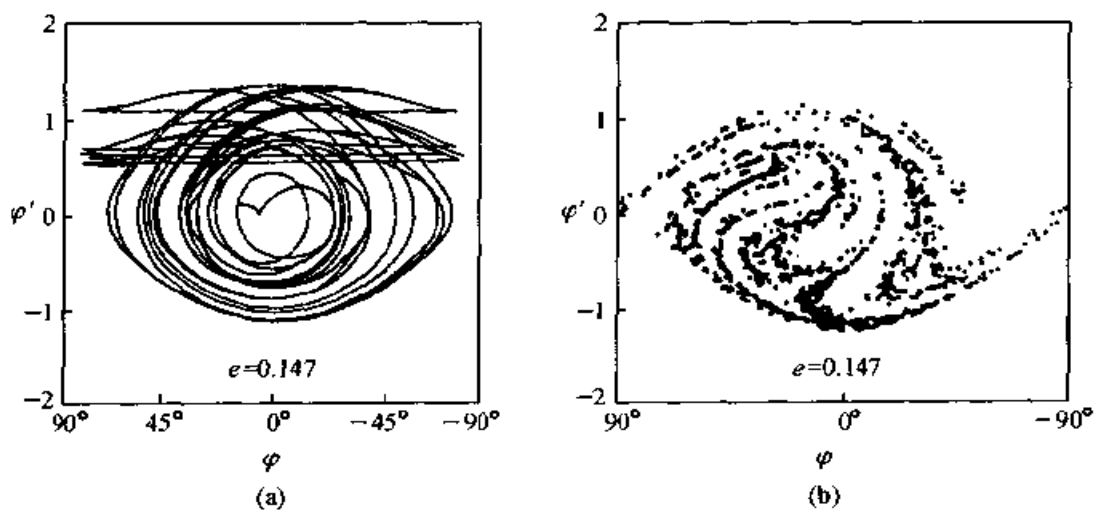


图 6.8 混沌姿态运动的相轨迹和庞加莱映射

6.2.2 转子系统^[54]

讨论一个简单的转子系统。考虑弹性轴的变形,可以观察到两种不同的运动:大轨道运动(转子中心绕转轴变形前位置的转动)和小轨道运动(转子绕自身中心的转动),分别如图 6.9 所示。设 x, y 为转子中心的偏移,引入复变量 $z = x + yi$,可导出系统的动力学方程为

$$\ddot{z} + c\dot{z} + z(-a + bz^2) = Pe^{i\Omega t} \quad (6.2.3)$$

其中 Ω 为激励频率, a 和 b 为与轴材料物理特性有关的常数。若忽略非线性,令 $b=0$,则对子高速转子的计算误差过大。研究表明,在幅频特性曲线上,当转子的运动在大小轨道间跳跃时发生混沌运动,如图 6.10 所示。

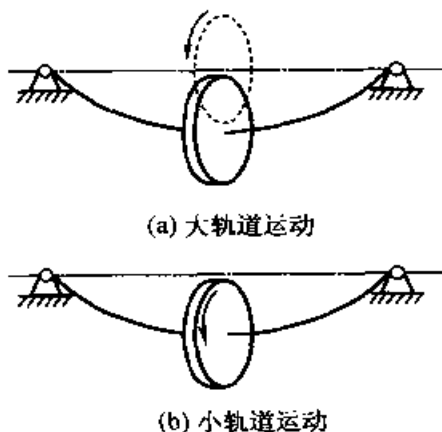


图 6.9 转子的两种运动

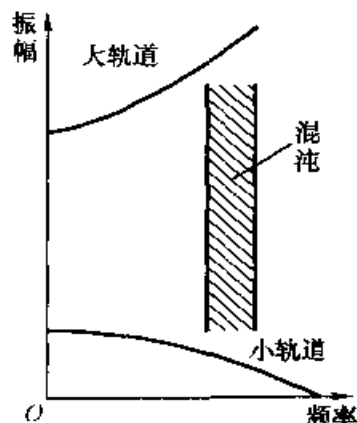


图 6.10 有混沌带的幅频特性曲线

6.2.3 海洋平台上设备的振动^[58]

海洋平台结构如图 6.11 所示,上面放置的设备与平台不固联,如图 6.12 所示。设平台与设备之间的摩擦力较大而使设备无相对滑动。设

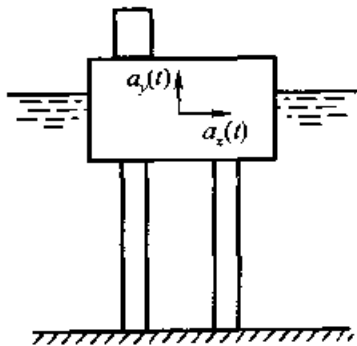


图 6.11 海洋平台及设备示意图

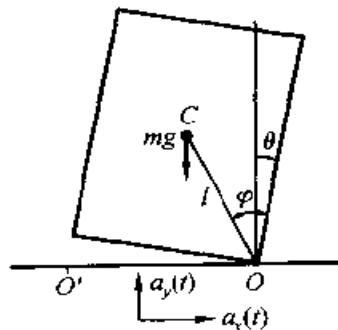


图 6.12 平台上设备的力学模型

备的质量为 m , 质心到点 O 的距离为 l , 对点 O 的转动惯量为 J , 设备的高和宽分别为 h 和 b 。设海浪导致平台的水平和铅垂加速度分别为 a_x 和 a_y 。以设备的倾斜角 θ 为广义坐标, 得到系统的动力学方程

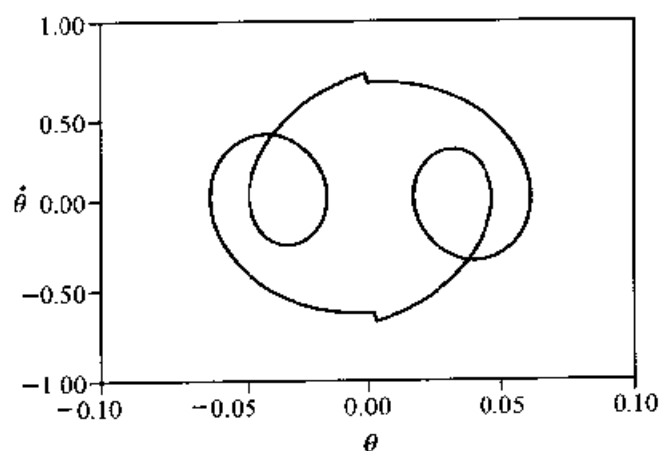
$$J\ddot{\theta} + mla_x \cos(\theta - \varphi) - ml(g + a_y) \sin(\theta - \varphi) = 0 \quad (6.2.4)$$

其中

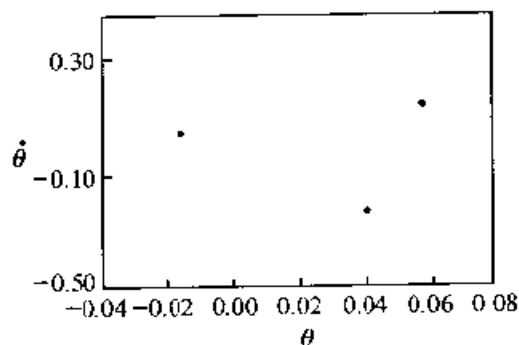
$$\varphi = \operatorname{arccot} \frac{h}{b} \quad (6.2.5)$$

$$\text{当} \quad a_x > \frac{bg}{h} \left(1 + \frac{a_y}{g} \right) \quad (6.2.6)$$

时, 设备将与平台碰撞。设恢复系数为 e , 在 t 时刻碰撞前后角速度满足关系式:



(a) 相轨迹

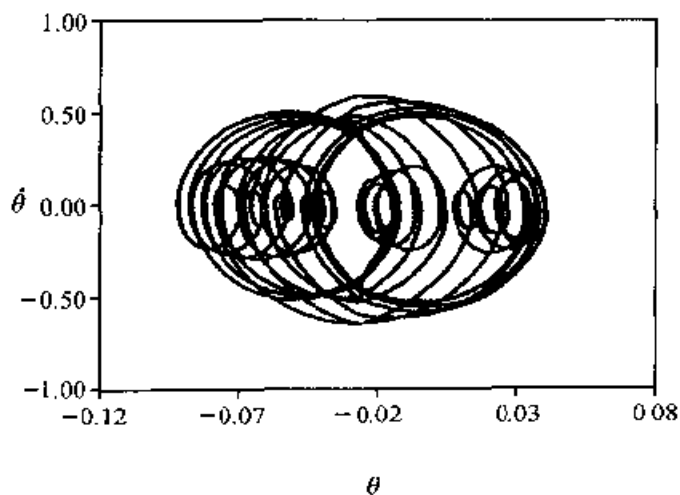


(b) 庞加莱映射

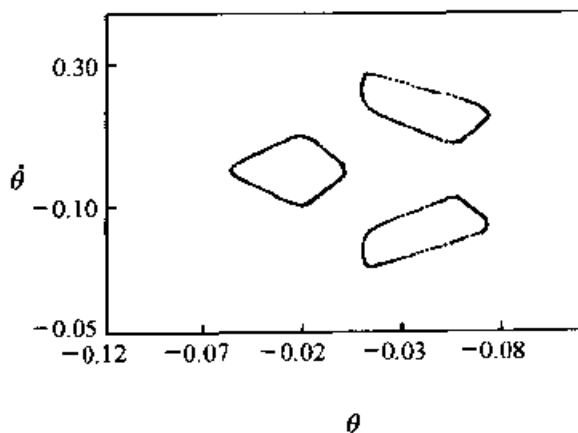
图 6.13 平台上设备的 1/3 亚谐波周期运动

$$\dot{\theta}(t^+) = e \dot{\theta}(t^-) \quad (6.2.7)$$

设海浪激励为简谐激励。在不同参数条件下,系统将出现 $1/3$ 亚谐波周期运动、准周期运动和混沌运动,其相轨迹和庞加莱映射分别如图 6.13, 6.14 和 6.15 所示。比较图 6.14 和图 6.15, 仅从相轨迹上难以区分准周期运动和混沌运动, 而在庞加莱映射图上很容易区分。

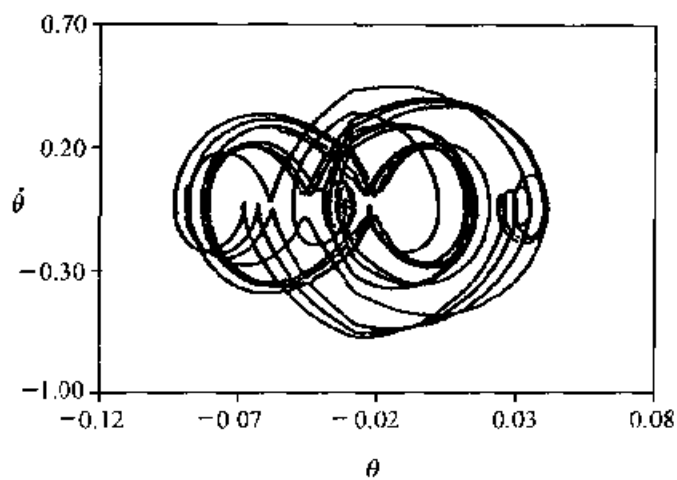


(a) 相轨迹

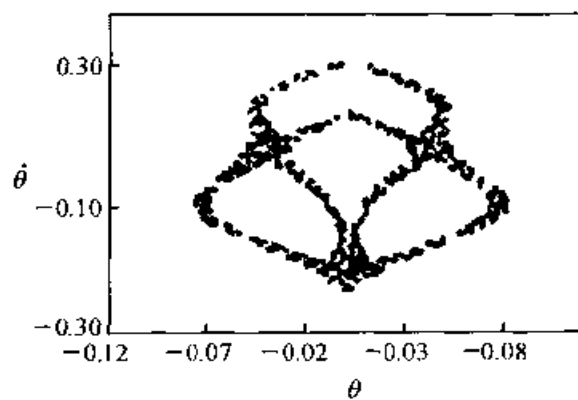


(b) 庞加莱映射

图 6.14 平台上设备的准周期运动



(a) 时间历程



(b) 庞加莱映射

图 6.15 平台上设备的混沌运动

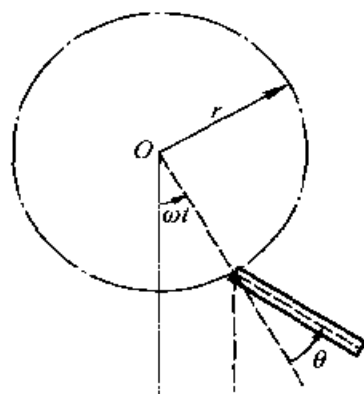


图 6.16 切碎机刀片的力学模型

6.2.4 切碎机刀片的振动^[59]

切碎机的刀片可以简化为动支承上的复摆,如图 6.16 所示。设刀片是质量为 m 、长度为 l 的均质细杆。支承点以角速度 ω 和半径 r 绕点 O 作圆周运动。阻力系数为 c 。以刀片偏离点 O 和支承连线的角度 θ 为广义坐标,量纲一的动力学方程为

$$\theta'' + c\theta' + 6 \left[\frac{r}{l} - \frac{g}{\omega^2 l} \cos 2\tau \right] \sin \theta - \frac{g}{\omega^2 l} \sin 2\tau \cos \theta = 0 \quad (6.2.8)$$

其中

$$\tau = \frac{1}{2}(\omega t + \pi), \quad \theta' = \frac{d\theta}{d\tau}, \quad \theta'' = \frac{d^2\theta}{d\tau^2} \quad (6.2.9)$$

系统在不同参数条件下出现混沌振动。无阻尼情形($c=0$)的庞加莱映射如图 6.17a 所示。有阻尼情形($c \neq 0$)的庞加莱映射如图 6.17b 所示。可以看出无阻尼的保守系统的庞加莱映射图 6.17a 为模糊一片的点集,而有阻尼的耗散系统的庞加莱映射图 6.17b 具有更为细致的结构。

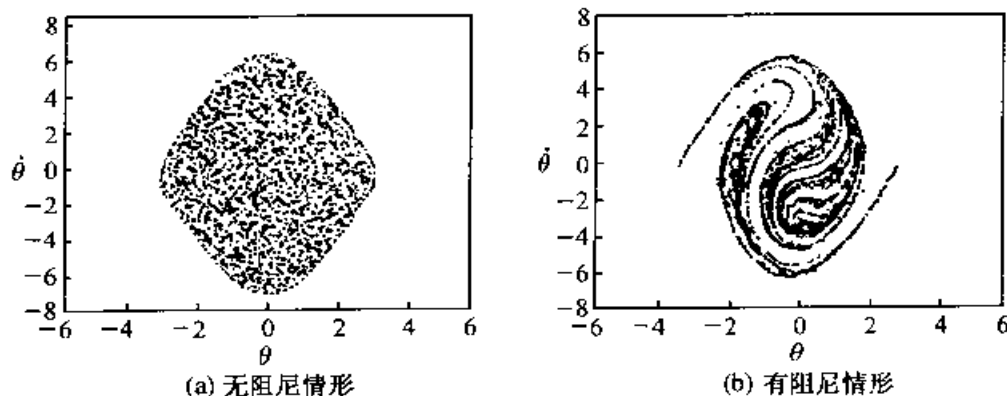


图 6.17 切碎机刀片混沌振动的庞加莱映射

§ 6.3 混沌振动的数值识别

6.3.1 混沌振动数值识别概述

混沌振动的数值识别为非线性动力学数值研究的重要方面。混沌振动的识别问题是指根据系统的动力学行为判断它是否为混沌振动。在实践过程中,人们发现系统运动的若干数值特征可用于识别混沌振动,主要指李雅普诺夫指数、分形维数、功率谱、熵等。当系统运动的上述数值特

征中的一种或数种满足特定条件时,便可断定系统出现混沌振动。

根据前一节的阐述,混沌振动具有多方面含义。将这些含义量化便得到识别混沌振动的相应数值特征。为刻划混沌振动的初态敏感性,可以引入李雅普诺夫指数。为刻划混沌振动的往复非周期性,可以定义各种维数。为刻划混沌振动的随机性,可以采用功率谱密度函数。为刻划混沌振动的不可预测性,可以利用熵的概念。

本节讨论混沌振动的数值识别问题。除叙述功率谱及其在识别混沌振动中的应用以外,重点阐述李雅普诺夫指数、分形维数以及分形维数与李雅普诺夫指数之间的关系,而对于熵的概念在识别混沌振动中的应用则没有涉及。需要指出,混沌振动的数值识别仍是一个尚未完全解决的课题,识别混沌振动各种数值特征的适用性和相互关系以及算法的改进等都有待深入研究。混沌的数值研究包括数值识别已成为一个重要的研究领域,更全面的论述可参阅文献[34,41,47,83,113]。

6.3.2 李雅普诺夫指数

混沌振动过程的初态敏感性使得初始时刻靠得很近的两条相轨迹随着时间增长逐渐远离。如果能够定量刻划这种邻近相轨迹的发散性,便可以建立混沌的一种数值识别方法。李雅普诺夫指数就是表示相空间内邻近轨迹的平均指数发散率的数值特征。 n 维相空间中的某一时刻,两条邻近轨迹之间的距离可以分解在 n 个不同的方向,这 n 个不同方向上的距离增长率是不同的,每一个增长率就是一个李雅普诺夫指数。上述直观的基本思想可作以下更精确地表述。

将振动系统用 n 个一阶自治微分方程组描述:

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (6.3.1)$$

选系统(6.3.1)两条起始点相近的相轨迹 L_1 和 L_2 ,起始点分别为 x_0 和 $x_0 + \Delta x_0$,称以 x_0 为初始值的轨线为基准相轨迹,以 $x_0 + \Delta x_0$ 为初始值的相轨迹为邻近相轨迹。在 t 时刻,邻近相轨迹和基准相轨迹上的点为 $x(x_0 + \Delta x_0, t)$ 和 $x(x_0, t)$,记 $w(x_0, t) = x(x_0 + \Delta x_0, t) - x(x_0, t)$ 。当 w 充分小时,满足方程(6.3.1)在 x_0 处的线性化方程:

$$\dot{w} = Df \cdot w \quad (6.3.2)$$

其中 $n \times n$ 雅可比矩阵 Df 在 x_0 处计算。此时两条邻近相轨迹沿 w 方向的平均指数发散率为

$$\lambda(x_0, w) = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \|w_0\| \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \frac{\|w\|}{\|w_0\|} \quad (6.3.3)$$

式中 $w_0 = w(x_0, 0)$ 。在 n 维相空间中, w 的全体张成一个随相轨迹运动的 n 维空间, 称为切空间。选择该切空间的一组基底 $\{e_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, 对应于每个基底矢量 e_i , 由式(6.3.3)可确定 n 个数值 $\lambda(x_0, e_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。将这组数值由大到小排列为

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \quad (6.3.4)$$

称为系统(6.3.1)的李雅普诺夫指数。

李雅普诺夫指数可能为正, 也可能为负。正李雅普诺夫指数表示对应方向上的发散, 负李雅普诺夫指数表示对应方向上的收缩。对于自治系统, 如果所有李雅普诺夫指数均为负, 系统将趋于静止; 如果有李雅普诺夫指数为零而其余的为负, 系统作周期性运动; 如果存在正李雅普诺夫指数而运动又是往复的, 系统作混沌运动。由于早期所研究的混沌均仅有一个为正的李雅普诺夫指数, 后来发现存在多个李雅普诺夫指数为正的混沌运动, 称作超混沌。

根据李雅普诺夫指数可以对 $n = 2, 3, 4$ 维的耗散系统的吸引子及其相应运动进行分类, 如表 6.1 所示。

表 6.1 低维相空间中吸引子的分类

维数 n	李雅普诺夫指数的符号	吸引子的类型	对应运动形式
3	- - -	稳定不动点	静止
	0 - -	极限环	周期运动
	0 0 -	二维环面	准周期运动
	+ 0 -	混沌吸引子	混沌运动
4	- - - -	稳定不动点	静止
	0 - - -	极限环	周期运动
	0 0 - -	二维环面	准周期运动
	0 0 0 -	三维环面	准周期运动
	+ 0 - -	混沌吸引子	混沌运动
	+ 0 0 -	三维环面上的混沌吸引子	混沌运动
	+ + 0 -	超混沌吸引子	超混沌运动
5	- - - - -	稳定平衡点	静止
	0 - - - -	极限环	周期运动
	0 0 - - -	二维环面	准周期运动
	0 0 0 - -	三维环面	准周期运动
	0 0 0 0 -	四维环面	准周期运动
	+ 0 - - -	混沌吸引子	混沌运动

						续表
维数 n	李雅普诺夫指数的符号					吸引子的类型
	+	0	0	-	-	三维环面上的混沌吸引子
	+	0	0	0	-	四维环面上的混沌吸引子
	+	+	0	-	-	三维环面上的超混沌吸引子
	+	+	0	0	-	四维环面上的超混沌吸引子
	+	+	+	0	-	超混沌吸引子
						对应运动形式
						混沌运动
						混沌运动
						超混沌运动
						超混沌运动
						超混沌运动

例 6.3-1 上田振子的李雅普诺夫指数。^[65]

解：将表示上田振子的例 6.1-1 中式(a)写为自治系统的形式：

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1^3 + \frac{F_0}{m}\cos x_3 \\ \dot{x}_3 &= \omega \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

相应的雅可比矩阵为

$$\mathbf{Df} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3k}{m}x_1^2 & -\frac{c}{m} & -\frac{F_0}{m}\sin x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{b})$$

取 $m=1.0, c=0.1, k=1.0$ 和 $\omega=1.0$ 。不同 F_0 对应的李雅普诺夫指数 λ_1 和 λ_3 如表 6.2 所示, 而 $\lambda_2=0$ 。

表 6.2 不同 F_0 对应的上田振子的李雅普诺夫指数 λ_1 和 λ_3

F_0	9.9	10	11	12	13	13.3
λ_1	0.065	0.102	0.114	0.149	0.182	0.183
λ_3	-0.166	-0.202	-0.214	-0.249	-0.282	-0.284

例 6.3-2 切碎机刀片的混沌运动的李雅普诺夫指数。^[59]

解：图 6.16 和图 6.17 所示切碎机刀片的混沌运动的李雅普诺夫指数分别为 0.392, 0, -0.392 和 0.423, 0, -0.567。

由以上讨论可知, 用李雅普诺夫指数刻画混沌只需确定最大李雅普诺夫指数是否为正。因此, 在识别混沌振动时往往不需要计算出系统所有的李雅普诺夫指数, 而只需计算最大李雅普诺夫指数, 这样可以大大减

少计算量。

若邻近轨迹按指数发散,邻近轨迹远离基准轨迹, w 的长度将随时间演化而逐渐增大。足够长时间后的 w 不能再由式(6.3.3)确定。因此在实际计算中,如果 w 变大,则要重新设定 w ,才能保证计算的正确性。为此可采用如下算法。取两条邻近轨迹 L_1 和 L_2 ,初始点分别为 x_0 和 z_0 ,两起始点之间的距离为 $d_0 = \|z_0 - x_0\|$ 。从 x_0 和 z_0 出发的相点将沿各自的轨迹 L_1 和 L_2 运动,经过时间 Δt 后,分别运动到 x_1 和 y_1 ,这时距离为 $d_1 = \|y_1 - x_1\|$ 。在 x_1 和 y_1 之间取一点 z_1 使得 $\|z_1 - x_1\| = d_0$, x_1 和 z_1 分别在轨迹 L_1 和 L_3 上。再以 x_1 和 z_1 为初始点,经过时间 Δt 后,分别沿轨迹 L_1 和 L_3 运动到 x_2 和 y_2 ,这时距离为 $d_2 = \|y_2 - x_2\|$ 。这一过程如图 6.18 所示。如此循环下去,经过 m 个 Δt 后得到 m 个 d_i ($i = 1, 2, \dots, m$),其中 $d_i = \|y_i - x_i\|$ 。由于 d_i 在切空间中沿最大李雅普诺夫指数所对应的基底矢量方向的增增长远大于在其它方向上的增长,故最大李雅普诺夫指数为

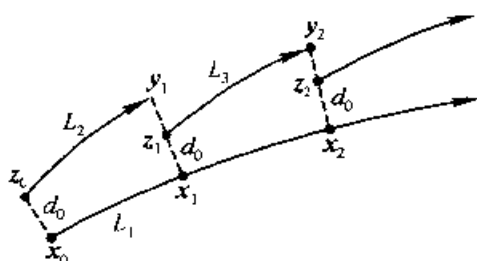


图 6.18 计算最大李雅普诺夫指数示意图

$$\lambda_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m \Delta t} \sum_{i=1}^m \ln \frac{d_i}{d_0} \quad (6.3.5)$$

在实际计算时, m 只能为有限数。由于 λ_1 的获得是轨迹各处指数发散率的统计平均值,统计要求具备足够的信息量,因此 m 为相当大的整数。

由最大李雅普诺夫指数的定义可知,当 $\lambda_1 > 0$ 时,系统有初态敏感性,有界运动将为混沌;当 $\lambda_1 = 0$ 时,系统对初值不敏感,呈现周期性运动;当 $\lambda_1 < 0$ 时,系统长期行为与初值无关,收敛到平衡点。

例 6.3-3 海洋平台上设备运动的最大李雅普诺夫指数。^[58]

解:图 6.13、图 6.14 和图 6.15 所示海洋平台上设备周期运动、准周期运动和混沌运动的最大李雅普诺夫指数分别为 0,0,0.14。

6.3.3 分形维数

在线性代数中,空间的维数是指张成该空间所需独立向量的数目。

这种维数概念与人们日常生活中形成的直观的几何意识相符,点的维数为 0,直线的维数为 1,平面的维数为 2,……。但这种维数概念难以描述数学研究中某些似点又似线的几何结构,如著名的康托(G. Cantor)集合。取一单位长度线段,等分为 3 端,截去中段,得到 2 个长度为 $1/3$ 的线段;再将这两个长度为 $1/3$ 的线段等分为 3 端,截去中段,得到 4 个长度为 $1/9$ 的线段;如图 6.19 所示。如此进行下去,得到 2^n 个长度为 3^{-n} 的线段,令 $n \rightarrow \infty$ 所得到的集合称为康托集合。康托集合是无穷多但又无穷稀疏的点集,其维数介于 0 和 1 之间,上述维数概念不再适用。理论分析和数值计算都表明存在非常规的几何形体,其维数不是整数。

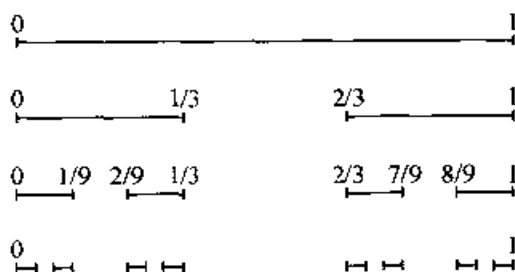


图 6.19 康托集合示意图

为推广维数的概念,可从另一角度进行分析。正方形之所以为二维,是因为如果边长增加 k 倍,则面积增加 $m = k^2$ 倍。同理,立方体的边长增加 k 倍,则体积增加 $m = k^3$ 倍,因而是三维。一般地,对于 d 维几何体,若一个空间方向上几何尺寸增加 k 倍,则体积增加 $m = k^d$ 倍。因而可将维数定义为

$$d = \frac{\ln m}{\ln k} \quad (6.3.6)$$

按以上定义的维数不再局限于整数。这种维数为非整数的几何体称为分形。

例 6.3-4 利用式(6.3.6)计算康托集合的维数。

解: 对于康托集合,若将长度为 $1/3$ 的 $(0, 1/3)$ 线段增加 3 倍,成为 $(0, 1)$,则截去中段后由于包含 $(0, 1/3)$ 和 $(2/3, 1)$ 两段而使长度增加 2 倍。由式(6.3.6),维数 $d = \ln 2 / \ln 3 = 0.6309, \dots$, 介于 0 和 1 之间。

一般的分形结构可能极为复杂,描述性的定义式(6.3.6)往往不能直

接应用。这时可对维数重新定义。设集合 S 为 n 维空间的子集, $N(a)$ 是覆盖集合 S 所需边长为 a 的 n 维立方体的最小数目, 则有以下豪斯多夫(F. Hausdorff)维数, 也称柯尔莫戈洛夫(A. N. Kolmogorov)容量维数

$$d_H = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln N(a)}{\ln (1/a)} \quad (6.3.7)$$

对于作为平面(二维空间)子集的单位面积正方形, 以边长为 a 的小正方形(二维立方体)覆盖, 至少需要 $N(a) = 1/a^2$, 故由式(6.3.7)知 $d_H = 2$, 等于所在空间的维数, 与常识相符。

例 6.3-5 利用式(6.3.7)计算康托集合的维数。

解: 对于直线(一维空间)的子集康托集合, 以长度 $a = (1/3)^i$ 的小线段(一维立方体)覆盖, 则至少需要 2^i 个, 由式(6.3.7),

$$d_H = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^i}{\ln 3^i} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \quad (a)$$

与按式(6.3.6)计算的结果一致。

考察分形这类几何形体时, 在不同的层次上, 亦即在愈来愈小的范围内, 可发现同等程度的不规则性和复杂性。因此, 这类几何形体的局部形态与整体形态类似, 即在不同的放大级别上, 几何形体的形态是相似的。几何形体的这种性质, 称为自相似性。具有自相似性的几何体维数也往往不是整数。

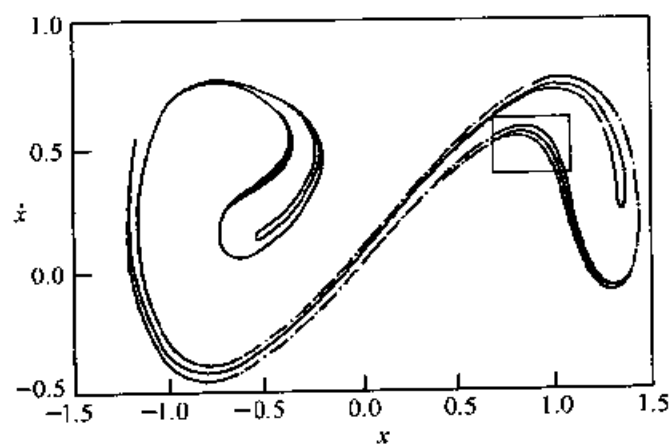
耗散系统的稳态运动对应于相空间中称为吸引子的有限集合, 它是耗散系统运动状态长时间演化的归宿。由于混沌是非周期而又有限的运动, 在相空间中其相轨迹被吸引在一个有限的空间区域内往复缠绕而恒不相交, 因此可能存在具有无标度性和自相似性的精细几何结构。

例 6.3-6 非线性受迫振动系统

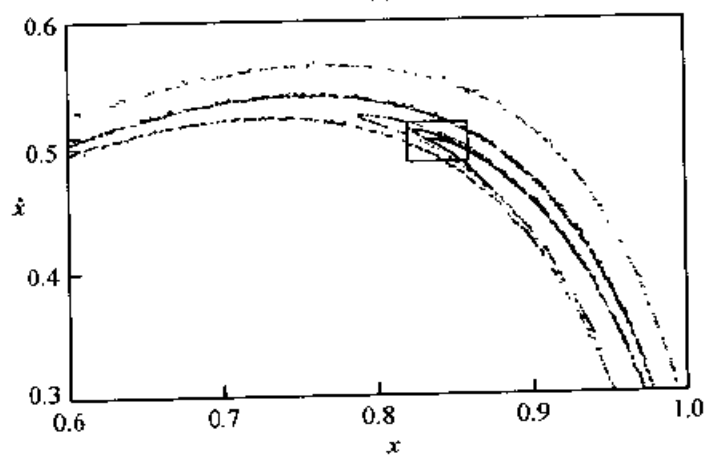
$$\ddot{x} + 0.25\dot{x} - x + x^3 = 0.3\cos t \quad (a)$$

庞加莱映射的精细结构。

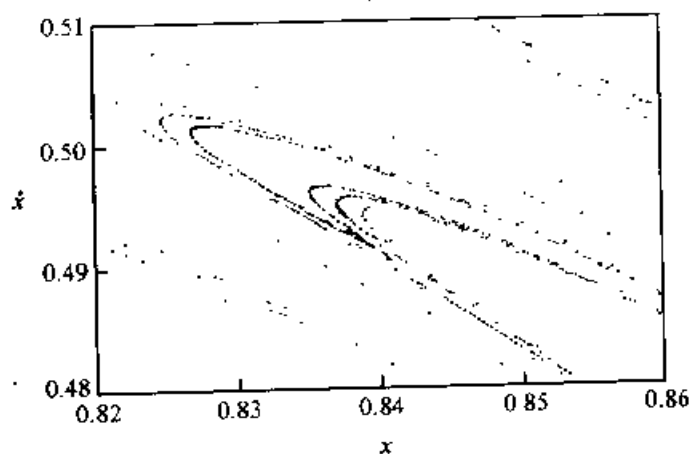
解: 系统(a)的庞加莱映射如图 6.20a 所示, 取图中小矩形逐次放大如图 6.20b, c 所示。可以看出, 系统(a)的庞加莱映射具有无标度性和自相似性。



(a)



(b)



(c)

图 6.20 庞加莱映射及其局部放大

具有自相似性的精细结构的几何形体为分形。若振动系统的吸引子为分形,则称该吸引子为**奇怪吸引子**。相应地,由点、闭曲线或闭环面构成的不是分形的吸引子称为**平凡吸引子**。耗散系统中,稳定平衡点、稳定周期运动和稳定准周期运动对应的吸引子分别为相空间中的点、闭曲线和闭环面,均为平凡吸引子。混沌运动对应的吸引子,称为**混沌吸引子**,通常是奇怪吸引子。

前述豪斯多夫维数可用于刻划奇怪吸引子的特性,然而豪斯多夫维数只是几何测度,应用于非线性系统的吸引子时,仅涉及轨迹是否通过小立方体面没有考虑轨迹通过小立方体的次数。为弥补这一不足,引入信息维数。设吸引子由 $N(a)$ 个边长为 a 的超立方体覆盖。记 P_i 为轨迹出现在第 i 个超小立方体的概率,则用小超立方体进行量测所得到的信息量为

$$I = - \sum_{i=1}^{N(a)} P_i \ln P_i \quad (6.3.8)$$

在定义式(6.3.7)中以信息量代替数目 $N(a)$,即得到信息维数

$$d_i = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\ln a} \sum_{i=1}^{N(a)} P_i \ln P_i \quad (6.3.9)$$

若相轨迹落入每个小立方体的概率均相等,即 $P_i = 1/N(a)$,则根据式(6.3.8)有 $I = \ln N(a)$,代入式(6.3.9)便回到定义式(6.3.7)。对于康托集合,若点落入左、右区间的概率分别为 P_L 和 P_R ,则可以推导出信息维数 $d_i = -(P_L \ln P_L + P_R \ln P_R) / \ln 3$ 。显然,当 $P_L = P_R = 1/2$ 时与按式(6.3.6)和(6.3.7)计算的结果一致。另一种考虑轨迹通过小立方体概率的维数为关联维数。仍记 P_i 为轨迹出现在第 i 个小立方体的概率,关联维数定义为

$$d_c = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(a)} P_i^2}{\ln a} \quad (6.3.10)$$

若相轨迹落入每个小立方体的概率均相等,即 $P_i = 1/N(a)$,则式(6.3.10)回到定义式(6.3.7)。

从计算角度考虑,确定覆盖吸引子的超立方体数目极为困难。为解决这个问题,需要建立分形维数便于计算的形式。为此需要确定相空间中的一条相轨迹。在相轨迹的稳态部分中采样得到总数为 N_0 个点的点集 S_P 。

首先引入点状维数。在其中一点 x_i 上建立一个半径为 r 的球面,设

球面中点集的点有 $N(r, x_i)$ 个。 S_p 中的点在此球面内的概率为

$$P(r, x_i) = \frac{N(r, x_i)}{N_0} \quad (6.3.11)$$

定义相轨迹在该点的维数为

$$d_p(x_i) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln P(r, x_i)}{\ln r} \quad (6.3.12)$$

对于平凡吸引子的情形,平衡点 x_0 使 $N(r, x_0) = 0$, 极限环使 $N(r, x_i) \propto r$, 与人们几何直觉一致。对平凡吸引子和某些奇怪吸引子, 式 (6.3.12) 定义的维数与点 x_i 无关。然而, 在大多数情形, 吸引子在各点的维数不同。为此, 任意选择点集 S_p 中 M ($M \ll N_0$) 个点计算平均值, 将吸引子的点状维数定义为

$$d_p = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sum_{i=1}^M P(r, x_i)}{M}}{\ln r} \quad (6.3.13)$$

在计算中, 一般取 $N_0 \approx 10^3 \sim 10^4$, 且 $M \approx 10^2 \sim 10^3$ 。点状维数是豪斯多夫维数便于计算的形式。同理可得到信息维数便于计算的形式。

关联维数的计算更容易进行。给定正数 a , 在点集 S_p 的 N_0^2 个点对 (x_i, x_j) 中, 计算出距离小于 a 的点对数目为 $N(i, j)$ 。则点对中距离小于 a 的比例为

$$c(a) = \frac{N(i, j)}{N_0^2} \quad (6.3.14)$$

则关联维数为

$$d_c = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln c(a)}{\ln a} \quad (6.3.15)$$

事实上, 仍记 P_i 为相轨迹的采样点出现在第 i 个小超立方体的概率, N_i 为第 i 个小超立方体中采样点的数目, 则有

$$P_i = \frac{N_i}{N_0} \quad (6.3.16)$$

在计算式 (6.3.14) 时, 由于同一个点对 (x_i, x_j) 和 (x_j, x_i) 认为是不同的, 故 N_i 个点给出 $N_i(N_i - 1)$ 个点对, 因此

$$c(a) = \frac{1}{N_0^2} \sum_{i=1}^{N_0} N_i(N_i - 1) = \sum_{i=1}^{N_0} P_i^2 - \sum_{i=1}^{N_0} \frac{N_i}{N_0} \quad (6.3.17)$$

当 N_0 充分大时,由式(6.3.17)得到式(6.3.14),与式(6.3.10)一致。

更一般地,若吸引子由 $N(a)$ 个边长为 a 的超立方体覆盖,定义 q 阶广义维数

$$d_q = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{(q-1)\ln a} \ln \sum_{i=1}^{N(a)} P_i^q \quad (q \neq 1) \quad (6.3.18)$$

显然,豪斯多夫维数和关联维数分别为 q 阶广义维数在 $q=0$ 和 $q=2$ 时的特例,即

$$d_H = d_0, \quad d_c = d_2 \quad (6.3.19)$$

通过极限运算还可验证信息维数是 q 阶广义维数中 $q \rightarrow 1^+$ 时的特例,即

$$d_i = \lim_{q \rightarrow 1^+} d_q \quad (6.3.20)$$

可以证明,当 $q > 0$ 时, d_q 随 q 的增大而减小。还可以证明,三种维数满足不等式

$$d_c \leq d_i \leq d_H \quad (6.3.21)$$

这一性质可用于检验计算的正确性。事实上, d_q 随 q 的变化是很小的。数值计算表明,具体的吸引子的关联维数、信息维数和豪斯多夫维数在数值上很接近。

吸引子的分形维数往往与所在相空间的拓扑维数相差不大于 2。但在特殊情形下也存在吸引子分形维数和拓扑维数之差大于 2 的例子,这类吸引子称为超胖吸引子。

由于李雅普诺夫指数和分形维数是对混沌运动的不同描述。李雅普诺夫指数描述了混沌运动的初态敏感性,分形维数描述了由混沌运动的非周期性产生的相轨迹的不规则性。因此两者之间可能存在某种联系。耗散系统的稳态动力学行为发生于维数低于相空间维数的吸引子上。从几何直观考虑,具有正李雅普诺夫指数和负李雅普诺夫指数的方向都对支撑吸引子起作用,而负李雅普诺夫指数对应的收缩方向,在抵消膨胀方向的作用后,形成吸引子维数的非整数部分。因此,将李雅普诺夫指数从最大的 λ_1 开始,将后继的李雅普诺夫指数一一相加起来。设加到 λ_K 时的和 $\sum_{i=1}^K \lambda_i$ 为正数,而再加下一个 λ_{K+1} 后,和 $\sum_{i=1}^{K+1} \lambda_i$ 成为负数。很自然地设想吸引子维数介于 K 与 $K+1$ 之间。用线性插值确定维数的非整数部分。因此定义李雅普诺夫维数

$$d_L = K + \frac{1}{-\lambda_{K+1}} \sum_{i=1}^K \lambda_i \quad (6.3.22)$$

其中 K 为使 $\sum_{i=1}^K \lambda_i > 0$ 成立的最大整数。数值结果表明,对于不少最大李雅普诺夫指数为正的一维以上映射或非线性系统李雅普诺夫维数与豪斯多夫维数相等或非常接近,卡普兰(L. D. Kaplan)和约克推测 d_L 与 d_H 相等,故式(6.3.22)也称为卡普兰-约克猜想。理论上可以证明 $d_H \leq d_L$ 。在二维映射的情形还可以证明 $d_H = d_L$ 。高维系统李雅普诺夫维数与豪斯多夫维数的关系尚待深入研究。

混沌吸引子与奇怪吸引子的定义并不相同,混沌吸引子具有正李雅普诺夫指数,而奇怪吸引子具有非整数维数。两者都是对不规则运动现象的几何描述。在大多数情形下,两者是一致的,即混沌吸引子是奇怪吸引子,而奇怪吸引子也是混沌吸引子。但在一些特殊情形下,存在奇怪非混沌吸引子,也有整数维数的混沌吸引子的例子。一些不可通约双频激励的非线性系统存在奇怪非混沌吸引子。这类系统随着参数的变化,二维环面的吸引子发生破碎,形成奇怪非混沌吸引子。参数继续变化,奇怪非混沌吸引子变为三维环面的准周期吸引子。三维环面吸引子随着参数进一步变化而破碎,最后形成奇怪吸引子,也是混沌吸引子。这个过程已在力学系统的实验中得到证实。

例 6.3-7 受准周期激励的阻尼单摆系统

$$\frac{1}{a}\ddot{q} + \dot{q} - \cos q = b + c(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \quad (a)$$

中的非混沌奇怪吸引子。^[49]

解: 固定其中系数

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1), \quad \omega_2 = 1, \quad a = 3.0, \quad c = 0.55 \quad (b)$$

使 b 变化。当 $b = 1.77$ 时,系统(a)有 3 频准周期吸引子,庞加莱映射如图 6.21a 所示;当 $b = 1.34$ 时,系统(a)有二频准周期吸引子,庞加莱映射如图 6.21b 所示;当 $b = 1.33$ 时,系统(a)有三频非混沌奇怪吸引子,庞加莱映射如图 6.21c 所示。但图 6.21c 所示奇怪吸引子不是混沌吸引子,因为其 2 个李雅普诺夫指数分别为 $\lambda_1 = -0.0717$ 和 $\lambda_2 = -0.2392$ 。

例 6.3-8 二自由度非线性系统

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 + 0.1\dot{q}_1 + q_1^3 &= 10\cos t \\ \ddot{q}_2 + 0.1\dot{q}_2 - q_1 + q_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

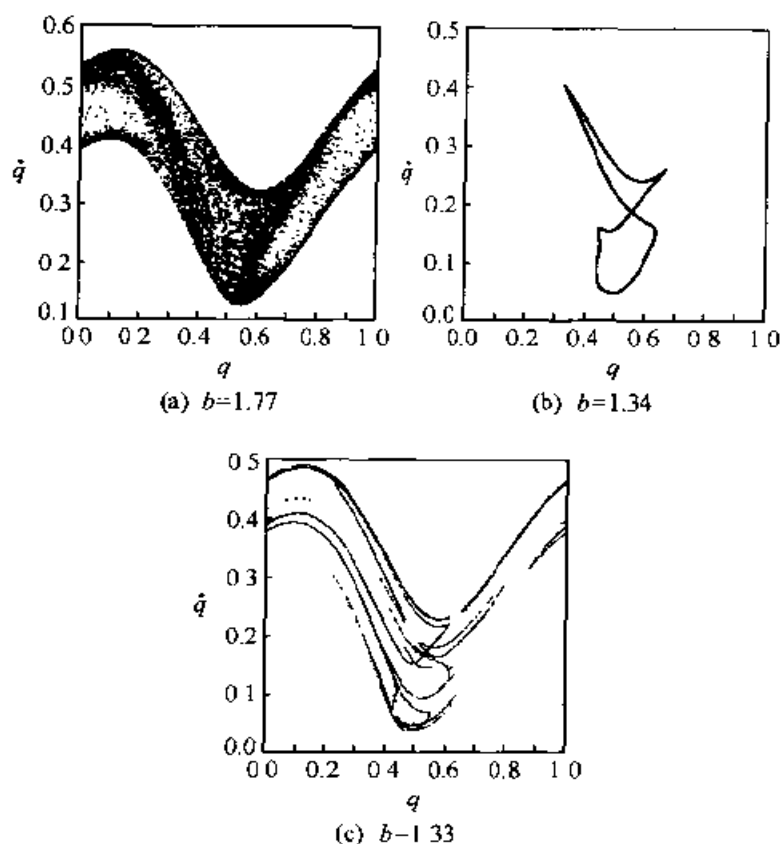


图 6.21 准周期激励阻尼单摆系统的吸引子

中的整数维混沌吸引子。^[54]

解：引入状态变量

$$(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5)^T = (q_1 \ \dot{q}_1 \ q_2 \ \dot{q}_2 \ t)^T \quad (b)$$

后可改写为 5 个方程构成的一阶自治系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -0.1x_2 - x_1^3 + 10 \cos x_5 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -0.1x_4 + x_1 - x_3 \\ \dot{x}_5 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

可以计算出系统(c)的 5 个李雅普诺夫指数分别为 $\lambda_1=0.1, \lambda_2=0, \lambda_3=0, \lambda_4=-0.1$ 和 $\lambda_5=-0.2$, 最大李雅普诺夫指数为正, 故为混沌吸引子。但李雅普诺夫维数 $d_L=4$ 为整数, 不是奇怪吸引子。

虽然在一般情况下, 仅用李雅普诺夫指数或分形维数可以识别混沌

运动,但本节内容表明,对于一些特殊情形需要综合运用李雅普诺夫指数、分形维数和功率谱等数值识别方法,并辅之以相平面和庞加莱映射才能判断系统是否呈现混沌性态。

在非线性振动问题中,不仅吸引子可能是分形,吸引盆的分界线也可能是分形。吸引盆为使动力学行为趋近于某个吸引子的全体初值的集合。非线性系统可能具有多个吸引子,每个吸引子都有相应的吸引盆。不同吸引盆的分界线称为盆边界。两个吸引盆的边界是鞍点的稳定流形。在一般情况下,盆边界是不稳定不变集的稳定流形。这里的不稳定不变集可以是不稳定平衡点、不稳定极限环和不稳定准周期环面,甚至可以是不稳定的混沌。在以往许多经典非线性振动理论讨论的问题中,盆边界都是光滑和连续的曲线或曲面。例如 § 2.4 中达芬系统的主共振和 § 2.5 中达芬系统的亚谐波共振中涉及的盆边界都是光滑曲线。但 20 世纪 80 年代格列鲍吉、奥特、约克等人的工作揭示盆边界可以是非常不规则的曲线或曲面。这类具有非整数维数的盆边界称为分形盆边界。分形盆边界仍是由不稳定不变集的稳定流形构成。大多数分形盆边界局部是断断续续的,如康托集分布的分段连续曲线。另外一些分形盆边界是处处连续但处处非光滑(不可微分)的曲线。还有一些高维系统的分形盆边界在不同范围内是分形维数不同的几何形体。分形盆边界的结构是个有待深入研究的问题。

例 6.3-9 受迫阻尼摆

$$\ddot{q} + c\dot{q} + \sin q = f \cos t \quad (\text{a})$$

的分形盆边界。^[83]

解:取 $c = 0.2$ 和 $f = 2.0$, 相应的受迫阻尼摆吸引盆及其边界如图 6.22 所示。图中存在两个周期均为 2π 的稳态周期运动,即两个极限环吸引子。一个极限环总体上为顺时针方向绕行,在图中其吸引盆用空白区域表示;另一个总体上逆时针绕行,在图中其吸引盆用黑色区域表示。两者之间的部分为盆边界,是不规则的分形。

如前所述,混沌振动对初始条件极为敏感。即使非线性系统不呈现混沌性态,当系统存在多个吸引子时,最终将根据不同的初始条件而静止于不同的平衡点或作不同的周期运动。由于分形盆边界的存在,系统的最终状态也可能对初始条件极为敏感,非线性系统的这种性质称为终态

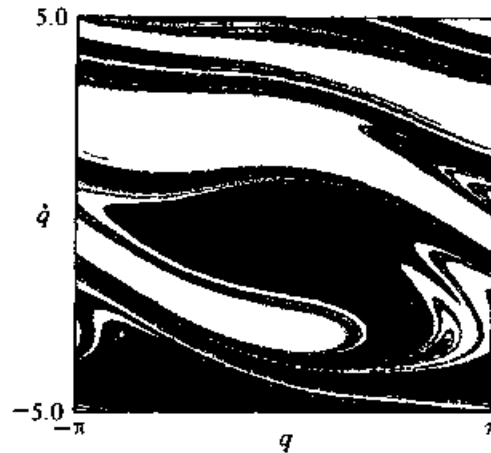


图 6.22 受迫阻尼摆的吸引盆及其边界

敏感性。

为明确终态敏感性的含义,先讨论二维系统的一个特例。设系统有两个平衡点吸引子 A 和 B ,吸引盆的边界为曲线 Γ 。记两个不同起始点的距离为 ϵ 。以两点连线为直径作一个圆 C 。若圆 C 不与边界曲线 Γ 相交,则从两个起始点出发的相轨迹最终将趋于同一个吸引子。若圆 C 与边界曲线 Γ 相交,对任意小的 ϵ ,从两个起始点出发的相轨迹最终都趋于不同的吸引子。从距离为 ϵ 的两个不同起始点出发的相轨迹趋于不同吸引子的概率即为圆 C 与边界曲线 Γ 相交的概率,设为 $f(\epsilon)$ 。 $f(\epsilon)$ 是初始值误差为 ϵ 时预测最终状态不可预测性的定量表示, $f(\epsilon)$ 愈大,不可预测性愈强。对于图 6.23 所示非分形的盆边界, $f(\epsilon) \propto \epsilon$ 。这意味着若初值精度提高 10 倍,预测相轨迹趋于给定吸引子的能力也提高 10 倍。但对于分形边界,设边界的分形维数为 d ,则 $f(\epsilon) \propto \epsilon^{2-d}$ 。非分形盆边界是其 $d=1$ 时的特例。一般 n 维相空间的情形,若盆边界的分形维数为 d ,可以证明

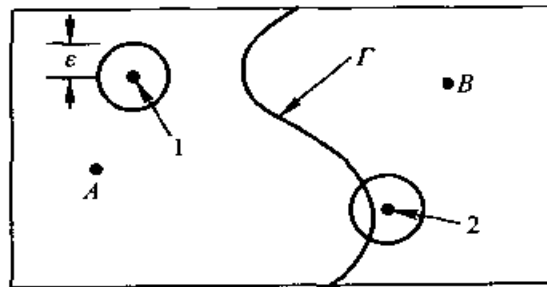


图 6.23 终态敏感性与盆边界

$$f(\epsilon) \propto \epsilon^\alpha \quad (6.3.23)$$

其中 $\alpha = n - d$ 称为不确定指数。例如,若分形盆边界的维数为 1.8,则不确定指数 $\alpha = 2 - 1.8 = 0.2$,故 $f(\epsilon) \propto \epsilon^{0.2}$ 。这意味着为使预测相轨迹趋于给定吸引子的能力提高 10 倍,初值精度需要提高 10^5 倍。可见系统最终状态对于初始条件极为敏感。

值得指出的是,这里所述的终态敏感性与混沌的初态敏感性为不同的概念。终态敏感性是系统的最终状态对初始条件的敏感依赖,其原因是非线性系统具有多个吸引子,而且吸引盆具有分形边界,其程度可以用系统的不确定指数度量。混沌的初态敏感性是混沌运动过程对初始条件的敏感依赖,其原因是邻近相轨迹在某些方向指数发散,发散的程度可以用李雅普诺夫指数度量。但两者的共同之处是导致运动不可长期预测。终态敏感性也说明对于多吸引子的非线性系统,平衡态和周期运动仍可能是不可预测的。

6.3.4 功率谱分析

功率谱表示随机运动过程在各频率成分上的统计特性,是研究随机振动的基本工具。对于给定的随机信号,可以采用标准程序软件计算或专用的频谱分析仪器测定其功率谱。为描述混沌振动的随机性,可以应用研究随机振动的频谱分析方法识别混沌振动。通常假设混沌是各态历经的,即时间上的平均量与空间上的平均量相等。

对于随机信号的样本函数 $x(t)$,功率谱可以用下列两种方式定义。其一为傅里叶变换平方的时间平均,即

$$\Phi_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad (6.3.24)$$

另一种是自相关函数的傅里叶变换,即

$$\Phi_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (6.3.25)$$

其中自相关函数 $R_x(\tau)$ 定义为

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} x(t) x(t + \tau) dt \quad (6.3.26)$$

根据随机过程中的维纳(N. Wiener) - 辛钦(A. Y. Khinchin)关系式,当 $R_x(\tau)$ 绝对可积时,两种定义式(6.3.24)与(6.3.25)等价。由于在电学中电压或电流的平方与功率成正比,因此 $\Phi_x(\omega)$ 有功率谱这一名称。

在实验测量和计算机仿真中,人们得到的往往是相差相同时间间隔 τ 的时间序列:

$$x_1, x_2, \dots, x_N \quad (6.3.27)$$

对于该序列附加周期性条件 $x_{N+i} = x_i$ ($i = 1, 2, \dots$) 后可以计算相关函数,即离散卷积:

$$c_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j x_{j+i} \quad (6.3.28)$$

再对 c_i 作离散傅里叶变换,

$$p_j = \sum_{i=1}^N c_i e^{\frac{2i\pi j i}{N}} \quad (6.3.29)$$

其结果 p_j 表示 x_k 中的第 j 个频率成分,即为时间序列(6.3.27)的离散功率谱。在数值计算中,更有效的确定离散功率谱的方法是不经过自关联函数,而直接求 x_i 的离散傅里叶系数:

$$a_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \cos\left(\frac{\pi k j}{N}\right), \quad b_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \sin\left(\frac{\pi k j}{N}\right) \quad (6.3.30)$$

然后计算

$$\bar{p}_j = a_j^2 + b_j^2 \quad (6.3.31)$$

通常为许多组 $\{x_i\}$ 计算一批 $\{\bar{p}_j\}$, 平均后即逼近式(6.3.29)给出的功率谱。此即 1965 年库利(J. W. Cooley)和特基(J. W. Tukky)提出快速傅里叶变换算法的基本思路。

时间序列(6.3.27)中包含两个基本的时间常数,采样时间间隔 τ 和总采样时间 $N\tau$ 。这两个时间常数分别决定两个特征频率:

$$\omega_{\max} = \frac{1}{2\tau} \quad (6.3.32)$$

和

$$\Delta\omega = \frac{1}{N\tau} \quad (6.3.33)$$

根据采样定理, ω_{\max} 为此种采样数据所能观测到的最高频率。 $\Delta\omega$ 为两个相邻傅里叶系数的频率差。为反映高频成分,需要缩短采样间隔。采用离散样本不可能唯一地确定系统的频率结构。例如从给定时间区间上的正弦函数上采 1 000 个点,存在无穷多种可能构造出频率更高的周期函数使之恰好通过这 1 000 个点。因此,离散采样总会出现虚假的高频成分。由于周期性边界条件,这些虚假的高频成分会反射回频率区间

$(0, \omega_{\max})$, 造成混叠现象。混叠现象原则上无法消除, 实践中可设法减弱。方法是令 ω_{\max} 显著地超过系统的实际主频率 ω_0 , 例如取

$$\omega_{\max} = k\omega_0 \quad (6.3.34)$$

其中经验系数 $k = 5 \sim 10$, 然后在所得的频率谱中只取 ω_0 以下部分。采用这种办法可以使混叠现象导致的假峰有效地降低, 甚至可以小到背景之下。为在功率谱上识别出较低的分频 ω_0/p (p 为正整数), 需要在相应的峰上取若干个点。若在分频的峰上需要 l 个点, 则有关系式

$$l\Delta\omega = \frac{\omega_0}{p} \quad (6.3.35)$$

在式(6.3.32), (6.3.33), (6.3.34)和(6.3.35)中消去 τ , ω_0 和 ω_{\max} , 得到

$$N = 2klp \quad (6.3.36)$$

此为有效地避免混叠和分辨出 ω_0/p 分频的一次变换所需要的最少采样数目。在数值研究中, 通常在计算机的能力允许的范围内取较大的数目 N 。

周期运动的傅里叶展开式只有相应频率的一项, 其离散功率谱中也只有相应的一项不为零, 因此功率谱中只在其运动频率及其分频和倍频处出现离散的谱线。周期运动的时间历程和功率谱如图 6.24 和 6.25 所示。准周期运动的功率谱是在几个不可通约的基频及其叠加处的离散谱线。准周期运动的时间历程和功率谱如图 6.26 所示。

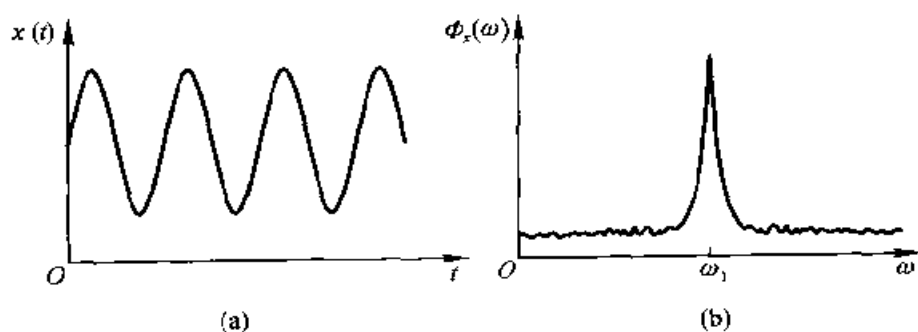


图 6.24 周期 1 运动的时间历程和功率谱

混沌运动为有界的非周期运动, 可视为无限多个不同频率的周期运动的叠加, 其功率谱具有随机运动的特征。混沌运动的功率谱为连续谱, 即出现噪声背景和宽峰。混沌运动的时间历程和功率谱如图 6.27 所示。

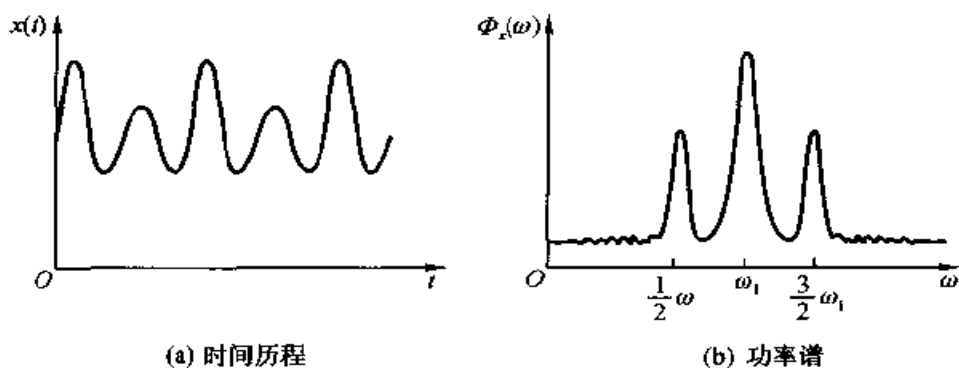


图 6.25 周期 2 运动的时间历程和功率谱

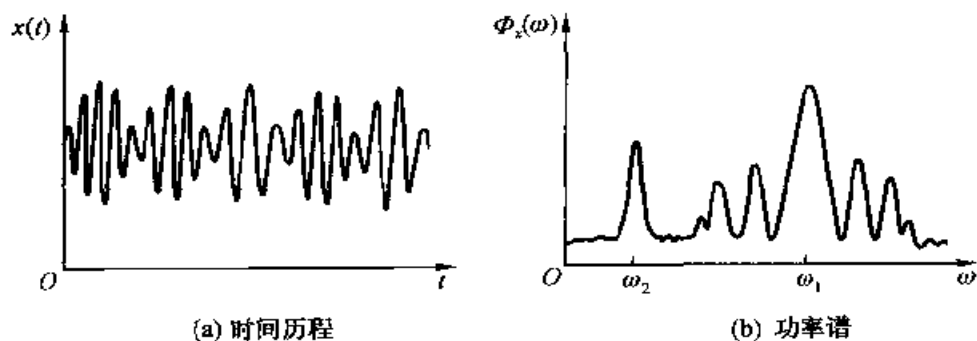


图 6.26 准周期运动的时间历程和功率谱

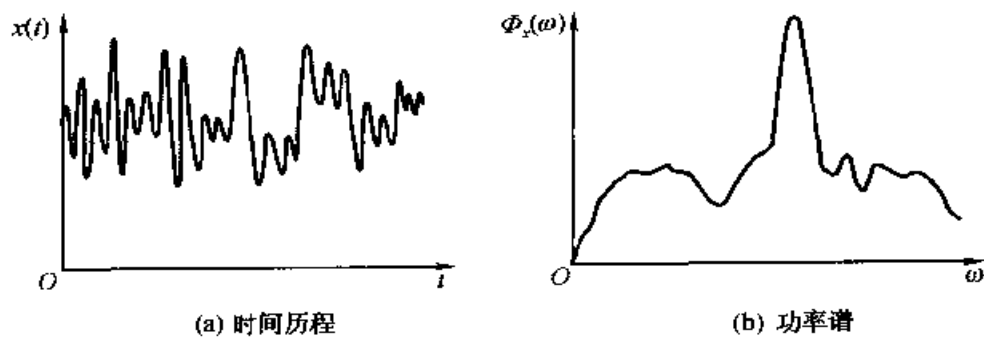


图 6.27 混沌运动的时间历程和功率谱

例 6.3-10 上田振子的功率谱。^[54]

解：例 6.3-1 中上田振子的功率谱如图 6.28 所示。

例 6.3-11 例 6.1-5(a) 描述非线性粘弹性梁运动的功率谱。^[96]

解：与图 6.5 中准周期振动、准周期环面破裂和混沌振动等四种情

况对应的功率谱分别如图 6.29 所示。

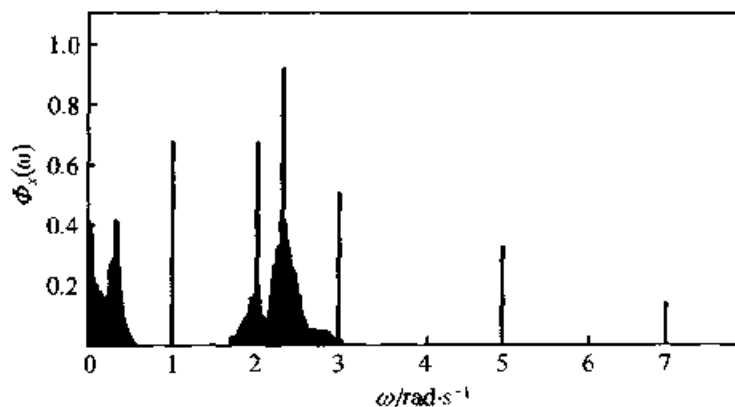


图 6.28 上田振子(a)的功率谱

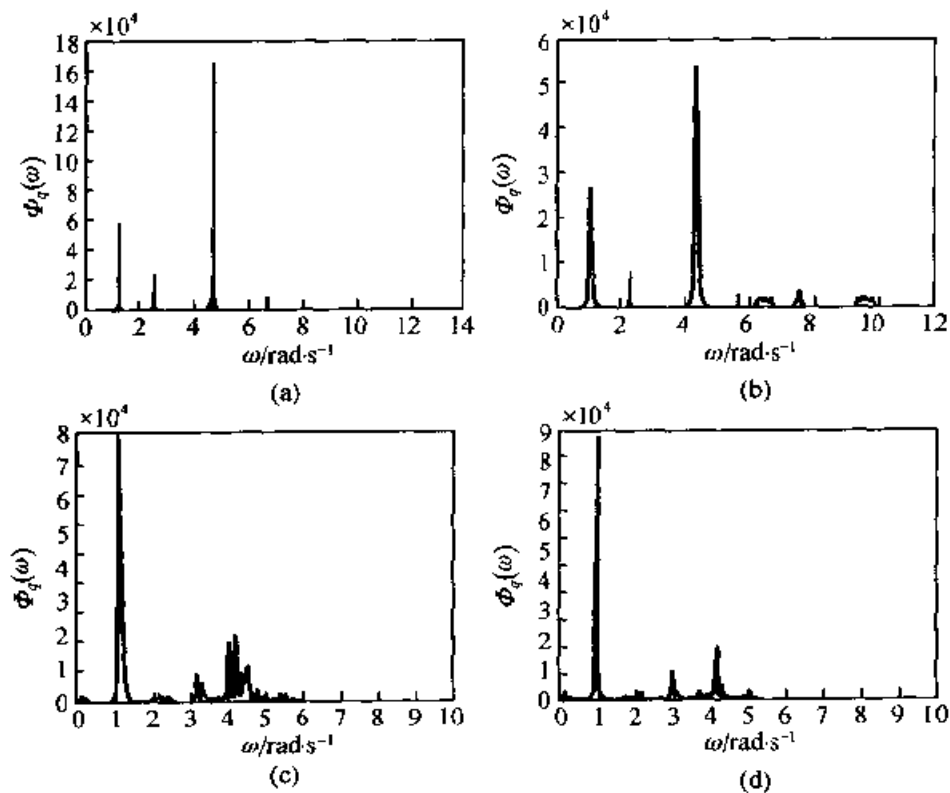


图 6.29 非线性粘弹性梁运动的功率谱

需要指出的是,采用功率谱分析只能确定振动是否是随机的,但无法确定这种随机振动是由于外界的随机扰动,还是由于确定性非线性系统

的内禀随机性。因此功率谱分析不能区分混沌振动和真正的随机振动。

自相关函数(6.3.26)或离散卷积(6.3.28)不仅是进行功率谱分析的理论基础,也可直接应用于混沌振动的数值识别。混沌振动的初态敏感性意味着在运动过程中迅速失去以往的信息。因此,经过一段时间后,混沌振动的自相关趋于零。类似于功率谱分析,相关函数也无法区分混沌振动和真正的随机振动。

§ 6.4 混沌振动的解析预测

6.4.1 混沌振动的解析预测概述

混沌振动的预测要求在运动开始以前,便能确定在何种条件下系统的运动将呈现混沌性态。用解析方法预测混沌振动出现的条件是非线性动力学中一个在理论和应用方面都有重要意义的问题。然而由于混沌振动的复杂性而难以做到严格的数学描述。混沌振动出现条件的解析预测迄今尚未很好解决,许多问题都有待深入研究。

预测混沌振动出现条件的方法可以分为三类:第一类是经验预测,对于某种具体的非线性振动系统,根据大量实验室实验或数值实验资料,归纳出混沌振动出现时系统参数所满足的条件;第二类是理论预测,对于某种类型的非线性振动系统,基于对混沌振动出现机制的理论分析,确定混沌振动出现时系统参数应满足的条件;第三类是经验-理论混合预测,即用理论方法确定混沌振动出现时系统参数应满足的条件,其中的某些系数由实验给出。三类方法中,经验预测的结果比较准确,但所需费用和时间较多,结果的适用范围较窄;理论预测的结果适用范围较宽,但有时不够准确;经验-理论混合预测介于两者之间。

用解析方法预测混沌振动出现条件是理论预测的一种。它是用解析表达式表示混沌振动出现的条件。本节叙述的梅利尼科夫(V. K. Melnikov)方法和什尔尼科夫(L. P. Shilnikov)方法都是典型的预测混沌振动出现条件的解析方法。拓扑结构的分析表明,系统出现横截同宿轨道或横截异宿环时可能产生混沌振动。梅利尼科夫方法基于摄动分析给出受小扰动的可积系统出现横截同宿轨道或异宿环的解析条件,作为系统出现混沌的必要条件。什尔尼科夫方法适用于具有鞍焦型同宿轨道的三维系统。当系统满足一定条件时,可以在奇点邻域构造庞加莱映射,并

证明其具有斯梅尔马蹄映射性质,从而判断系统出现混沌。由于证明系统存在鞍焦型同宿轨道较为困难,此方法应用较少。解析方法以混沌的拓扑描述为基础,尽管有一定的理论依据,但由于拓扑意义上的混沌与前面讨论的可观测混沌运动之间并非完全一致,在许多问题中,解析方法得到的混沌出现条件往往与实验或数值结果差别较大。

预测混沌振动出现条件的经验-解析方法是根据物理或数值实验发现某类非线性振动系统出现混沌的机制,如稳定极限环与不稳定极限环相交、从势阱内逃逸及跳跃过程中的分岔等,然后应用谐波平衡法和多尺度法等近似解析方法建立预测混沌判据的解析表达式。这类方法本质上属于经验-理论混合预测。本节也将给出这方面的例子,并对于一类实验系统进行解析预测结果、经验-解析预测结果与实验结果比较。预测混沌振动的近似解析判据近年来有一些研究,一般能够给出比单纯解析方法更接近实际的结果,但缺乏坚实的理论依据,适用范围也非常狭隘,局限于几类最简单的单自由度非线性振子的情形。

预测混沌振动出现的条件是个非常复杂的问题。这种复杂性至少表现在两个方面。一方面,系统运动性态不仅取决于参数条件,也与初始条件有关。因此对混沌全面的预测必须考虑系统不同吸引子的吸引盆。另一方面,实验和数值工作都发现,在参数空间中使系统呈现混沌性态的参数集合具有分形边界。由于分形的性质,系统参数微小的变化可能使系统呈现截然不同的动力学行为。

由于上述复杂性,对于非常简单的系统也难以建立混沌振动出现时系统参数应满足的充分和必要条件。目前对混沌出现条件的预测一般只能得到某个参数范围,在此范围内可能出现混沌。即使这种较弱意义上的混沌预测问题,也没有非线性系统普遍适用的结果。这不仅是因为混沌理论研究还不够成熟,更是因为这一问题本身的复杂性。

6.4.2 出现混沌振动的一种几何机制

庞加莱映射的双曲鞍点的稳定流形与不稳定流形是否相交,常与混沌振动能否发生相关。这一现象构成预测混沌振动的梅利尼科夫方法和什尔尼科夫方法的基础。

在§5.1关于分岔问题的讨论中定义的同宿和异宿轨道概念,也可利用稳定和不稳定流形概念重新定义。对于庞加莱映射 P 的双曲鞍点 p_s ,若其稳定流形 $W^s(p_s)$ 与不稳定流形 $W^u(p_s)$ 彼此重合,即 $W^s(p_s) =$

$W^u(p_s)$, 则称这种流形为同宿轨道。该轨道上的点当 $t \rightarrow \pm \infty$ 时趋于同一点 p_s 。对于庞加莱映射的两个双曲鞍点 p_{s1} 和 p_{s2} , 若 p_{s1} 的稳定流形 $W^s(p_{s1})$ 与 p_{s2} 的不稳定流形 $W^u(p_{s2})$ 重合, 则称这种流形为异宿轨道。该轨道上的点在 $t \rightarrow +\infty$ 和 $t \rightarrow -\infty$ 时趋于不同的点 p_{s1} 和 p_{s2} 。若 p_{s1} 的不稳定流形 $W^u(p_{s1})$ 也与 p_{s2} 的稳定流形 $W^s(p_{s2})$ 重合而形成另一条异宿轨道, 则称这两条异宿轨道构成异宿环。异宿环也可由多个双曲鞍点间的多条异宿轨道构成。同宿轨道、异宿轨道和异宿环的例子如图 6.30 所示, 图 a 为一条同宿轨道, 图 b 为两条同宿轨道, 图 c 为两条异宿轨道构成的异宿环, 图 d 为三条异宿轨道构成的异宿环。

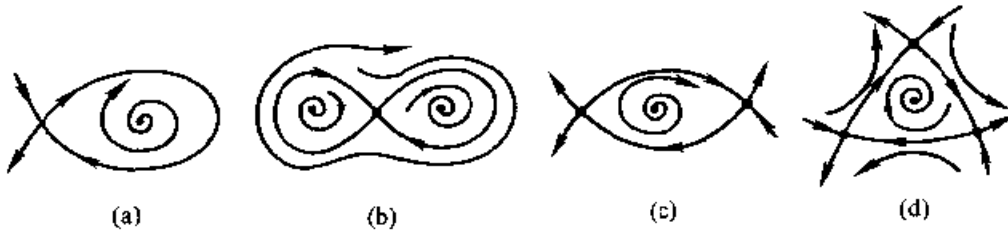


图 6.30 同宿轨道、异宿轨道和异宿环

若稳定流形与不稳定流形彼此不重合, 则两者可能相交也可能不相交。不相交时不稳定流形恒位于稳定流形的外侧或内侧, 如图 6.31 所示。稳定流形与不稳定流形不相切地相交称为横截相交, 横截相交与混沌振动相关。若同一双曲鞍点 p_s 的稳定流形 $W^s(p_s)$ 与不稳定流形 $W^u(p_s)$ 横截相交于一点, 则称该点为横截同宿点, 简称同宿点。若不同双曲鞍点 p_{s1} 和 p_{s2} 的稳定流形 $W^s(p_{s1})$ 与不稳定流形 $W^u(p_{s2})$ 横截相交于一点, 则称该点为横截异宿点, 简称异宿点。

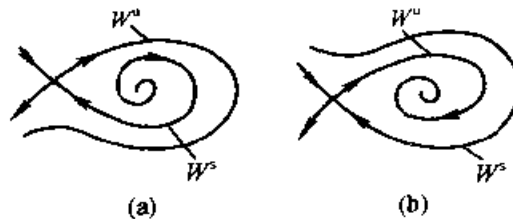


图 6.31 不相交的稳定流形和不稳定流形

如果存在一个同宿点 $q \in W^s(p_s) \cap W^u(p_s)$, 则 q 同时在 $W^s(p_s)$ 和 $W^u(p_s)$ 上。 $W^s(p_s)$ 和 $W^u(p_s)$ 均为不变流形, 故对于整数 m , $P^m(q)$ 也在 $W^s(p_s)$ 和 $W^u(p_s)$ 上, 因此 $P^m(q)$ 亦为同宿点。从而证明必有无穷多

个同宿点存在,使得不变流形呈现异常复杂的情形,如图 6.32 所示。

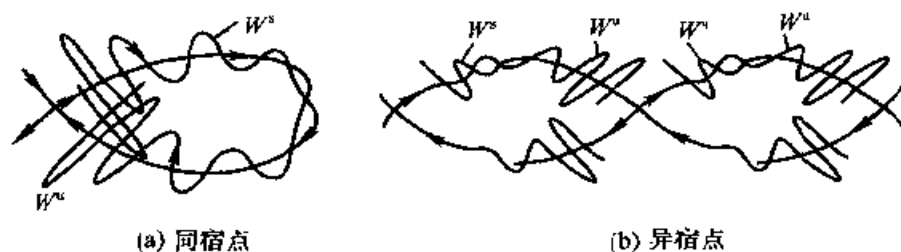


图 6.32 相交的稳定流形和不稳定流形

考察在庞加莱截面上横截同宿点附近的一小矩形区域。在映射过程中,沿稳定流形的方向上收缩,沿不稳定流形的方向上伸展,同时发生折曲。若干次映射后形成的马蹄型区域与原来的矩形区域相交得到两个新的小矩形区域,如图 6.33 所示。新的小矩形区域仍在横截同宿点附近,可以重复上述过程。从图中可以看出,矩形区域中原来很接近的点经过若干次映射后可能分离得很远,使初始误差迅速放大,因此这种复杂的几何结构可能导致混沌振动。这种将矩形区域收缩、伸展并且折曲再与自身相交的映射是 1963 年斯梅尔首先研究的,称为斯梅尔马蹄映射。

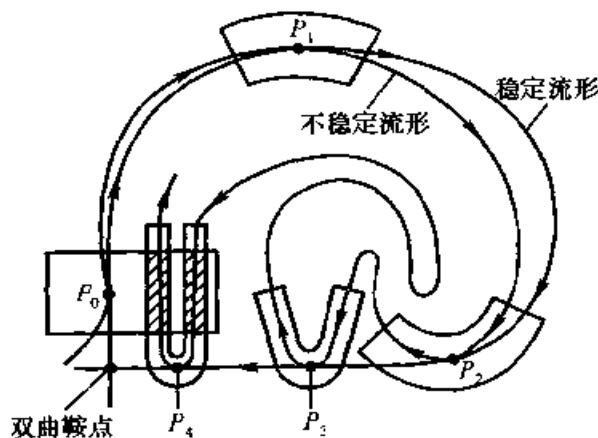


图 6.33 马蹄映射示意图

以上分析表明,出现混沌振动的一种几何机制是横截同宿点的产生。同理,横截异宿点的产生也可能导致混沌振动。这一结论的数学依据是混沌的拓扑描述,参阅附录五。

以上描述的仅是具有混沌性态的不变集,不一定具有吸引性。从实验或数值计算中可观测的混沌必须具有吸引性的不变集,即混沌吸引

子,并且要求有足够大的吸引盆。因此,对于实际系统,即使能判定具有前述意义上的混沌不变集,仍无充分理由断定该不变集就是实际观测到的混沌。这是本节讨论解析预测方法的局限所在。尽管存在上述局限性,横截同宿点的出现仍为预测混沌振动提供了重要的线索。双曲鞍点的稳定流形是不同吸引子的吸引盆边界,它与不稳定流形横截相交后,这种盆边界变得极为复杂而成为分形盆边界,使得运动具有敏感性。因此,横截同宿点的出现是产生混沌振动的一种先兆。

6.4.3 梅利尼科夫方法

1963年梅利尼科夫提出一种判断受小周期扰动的平而可积系统出现横截同宿点的解析方法。该方法适用条件是未受扰动的平面可积系统存在双曲鞍点和连接鞍点的同宿轨道或异宿环。对于受扰动系统,先通过庞加莱映射将非自治平面系统转化为平面映射。在小扰动的情形,原系统的双曲鞍点小邻域内有相应平而映射的双曲鞍点,其稳定流形与不稳定流形之间的距离经过一阶近似简化后可写作一种便于计算的形式,即梅利尼科夫函数。

研究平面非自治系统

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t) \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (6.4.1)$$

其中 ε 为小参数,扰动部分 g 为时间 t 的周期函数。设 $\varepsilon = 0$ 时的未扰系统

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (6.4.2)$$

有一个双曲鞍点 p_s ,并可积分出 p_s 的由稳定流形和不稳定流形重合构成的同宿轨道 $x^h(t - \tau)$,使得

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x^h(t - \tau) = p_s \quad (6.4.3)$$

初始时刻 τ 可为任意实数。

定义梅利尼科夫函数:

$$M(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x^h(t)) \wedge g(x^h(t), t + \tau) e^{\int_0^t \text{tr}(\mathbf{D}f(x^h(z))) dz} dt \quad (6.4.4)$$

式中算子 \wedge 定义为,对于 $a = (a_1, a_2)^T$ 和 $b = (b_1, b_2)^T$ 有

$$a \wedge b = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (6.4.5)$$

可以证明(推导过程见附录六),如果梅利尼科夫函数(6.4.4)有简单

零点,稳定流形和不稳定流形必横截相交而形成同宿点。根据前面混沌出现机制的分析可推测将出现混沌。这种判断稳定流形和不稳定流形相交,进而推导产生横截同宿点条件的方法称为梅利尼科夫方法。

根据以上结果判断,不计 ε^2 及更高阶的项,当且仅当式(6.4.4)给出的梅利尼科夫函数 $M(\tau)$ 有简单零点(在该点 $dM(\tau)/d\tau \neq 0$)时, $d_N(\tau, \tau)$ 改变符号。此时,稳定流形与不稳定流形横截相交形成同宿点。当 $M(\tau)$ 没有零点时,稳定流形与不稳定流形不相交。当 $M(\tau)$ 仅有非简单零点时,即 $M(\tau)$ 的零点与 $dM(\tau)/d\tau$ 的零点相同,则稳定流形与不稳定流形相切。在数值计算中,通常可以利用稳定流形与不稳定流形相切检验梅利尼科夫方法。1979年霍尔姆斯(P.J. Holmes)将梅利尼科夫方法应用于混沌振动研究,其主要结果如下例所示。

例 6.4-1 一类带负线性刚度项达芬方程

$$\ddot{x} + \varepsilon\gamma\dot{x} - ax + cx^3 = \varepsilon f \cos \omega t \quad (\gamma, a, c, f > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1) \quad (a)$$

出现混沌振动的解析预测及其数值验证。

解: 当 $\varepsilon = 0$ 时,未扰系统

$$\ddot{x} - ax + cx^3 = 0 \quad (b)$$

的相平面图如图 6.34 所示。双曲鞍点 $(0,0)$ 的稳定流形和不稳定流形重合构成的同宿轨道满足微分方程

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{a}{2} x^2 + \frac{c}{4} x^4 = 0 \quad (c)$$

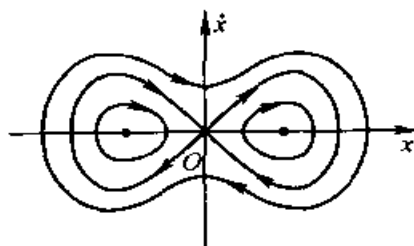


图 6.34 相平面图

设 $t=0$ 时 $\dot{x}=0$, 由式(c)解得 $x_0 = \pm \sqrt{2a/c}$ 。积分式(c), 有

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \sqrt{ax^2 - cx^4/2}} = t \quad (d)$$

计算定积分,整理后得到

$$x^{\pm}(t) = \pm \sqrt{\frac{2a}{c}} \operatorname{sech} \sqrt{at} \quad (e)$$

将式(a)写作式(6.4.1)的形式,得到

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ ax_1 - cx_1^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma x_2 + f \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (f)$$

与可积系统(6.4.2)对应的同宿轨道为

$$(x_1^\pm(t), x_2^\pm(t))^T = \left(\pm \sqrt{\frac{2a}{c}} \operatorname{sech} \sqrt{a}t, \mp \sqrt{\frac{2}{c}} a \operatorname{sech} \sqrt{a}t \tanh \sqrt{a}t \right)^T (g)$$

由式(f)推知

$$\operatorname{tr}(\mathbf{D}f) = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a - 3cx_1^2 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (h)$$

$$\begin{aligned} f(x^\pm(t)) \wedge g(x^\pm(t), t + \tau) \\ = [-\gamma x_2^\pm(t) + f \cos \omega(t + \tau)] x_2^\pm(t) \end{aligned} \quad (i)$$

将式(g), (h)和(i)代入式(6.4.4), 得到

$$M_\pm(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [-\gamma (x_2^\pm(t))^2 + f \cos \omega(t + \tau) x_2^\pm(t)] dt \quad (j)$$

上式中第一个积分可利用变换积分变量的方法求出, 利用式(c), 得到

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (x_2^\pm(t))^2 dt &= 2 \int_0^{\infty} (x_2^\pm(t))^2 dt = 2 \int_{\sqrt{2a/c}}^0 x_2(x_1) dx_1 \\ &= 2 \int_{\sqrt{2a/c}}^0 \sqrt{ax_1^2 - \frac{c}{2}x_1^4} dx_1 = \frac{4a^{3/2}}{3c} \end{aligned} \quad (k)$$

式(j)中第二个积分的计算比较繁复, 将式(g)代入并分析函数的奇偶性可得到

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega(t + \tau) x_2^\pm(t) dt \\ &= \mp \sqrt{\frac{2}{c}} a \left(\cos \tau \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t \operatorname{sech} \sqrt{a}t \tanh \sqrt{a}t dt - \right. \\ &\quad \left. \sin \tau \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t \operatorname{sech} \sqrt{a}t \tanh \sqrt{a}t dt \right) \\ &= \pm \sqrt{\frac{2}{c}} a \sin \tau \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t \operatorname{sech} \sqrt{a}t \tanh \sqrt{a}t dt \end{aligned} \quad (l)$$

积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t \operatorname{sech} \sqrt{a}t \tanh \sqrt{a}t dt$ 的计算需要应用复变函数论中的留数定理。对于图 6.35 所示 AB, BC, CD 和 DA 构成的封闭曲线 L, 复变函数 $\sin \omega z \operatorname{sech} \sqrt{a}z \tanh \sqrt{a}z$ 在 L 中有极点 $(0, \pi i/2\sqrt{a})$, 留数为

$-i\omega \cosh(\pi\omega/2\sqrt{a})$ 。根据留数定理:

$$\oint_L \sin \omega z \operatorname{sech} \sqrt{a} z \tanh \sqrt{a} z dz = 2\pi i \left(-i\omega \cosh \frac{\pi\omega}{2\sqrt{a}} \right) \quad (m)$$

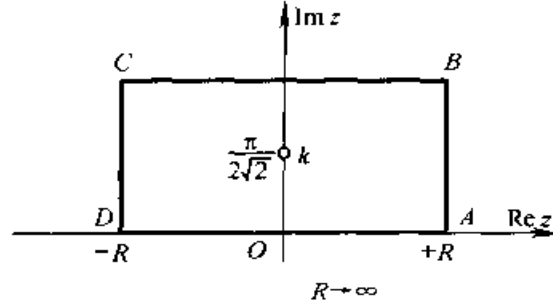


图 6.35 计算积分用的封闭曲线

令 $R \rightarrow \infty$, 得到

$$\left(1 + \cosh \frac{\pi\omega}{\sqrt{a}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t \operatorname{sech} \sqrt{a} t \tanh \sqrt{a} t dt = 2\pi\omega \cosh \frac{\pi\omega}{2\sqrt{a}} \quad (n)$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t \operatorname{sech} \sqrt{a} t \tanh \sqrt{a} t dt = \pi\omega \operatorname{csch} \frac{\pi\omega}{2\sqrt{a}} \quad (o)$$

综合以上推导结果, 得到

$$M_{\pm}(\tau) = -\frac{4a^{3/2}}{3c}\gamma \pm \pi f\omega \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{csch} \frac{\pi\omega}{2\sqrt{a}} \sin \omega\tau \quad (p)$$

由式(p)推知, 当且仅当

$$\epsilon f > \frac{4a^{3/2}\epsilon\gamma}{3\pi\omega\sqrt{2c}} \sinh \frac{\pi\omega}{2\sqrt{a}} \quad (q)$$

时, $M_{\pm}(\tau)$ 有简单零点。其中采用 ϵf 和 $\epsilon\gamma$ 代替 f 和 γ 是由于 ϵf 和 $\epsilon\gamma$ 为式(a)中出现的系数。因此, 式(q)为达芬系统(a)出现混沌的必要条件。

数值算例表明上述理论结果的正确性。^[51] 取 $a=1, c=1, \omega=1$ 和 $\epsilon\gamma=0.25$, 依次变化 ϵf 。由式(q)给出 ϵf 出现混沌的临界值为 0.188。当 ϵf 较小时, 庞加莱映射的稳定流形与不稳定流形不相交(图 6.36a)。当 ϵf 接近临界值时, 稳定流形与不稳定流形相切(图 6.36b)。当 ϵf 大于临界值时, 庞加莱映射的稳定流形与不稳定流形横截相交(图 6.37)。对于这种存在同宿点的情形, 系统呈现混沌性态。 $\epsilon f=0.30$ 和 $\epsilon f=0.40$

时的庞加莱映射确实具有混沌吸引子的特征,分别如图 6.38a 和 b 所示。

梅利尼科夫方法已有多方面的推广和深化。这里仅简要介绍对高维

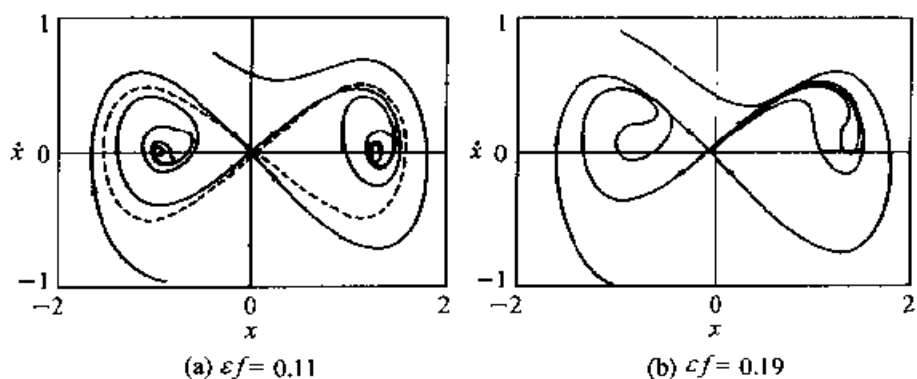


图 6.36 稳定流形和不稳定流形不横截相交

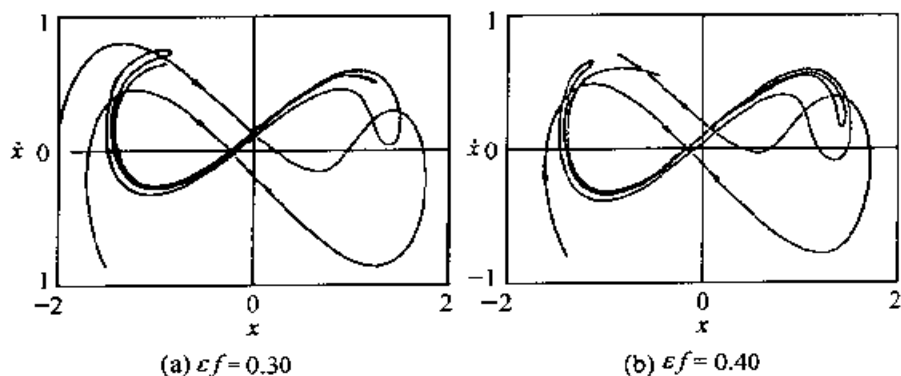


图 6.37 稳定流形和不稳定流形横截相交

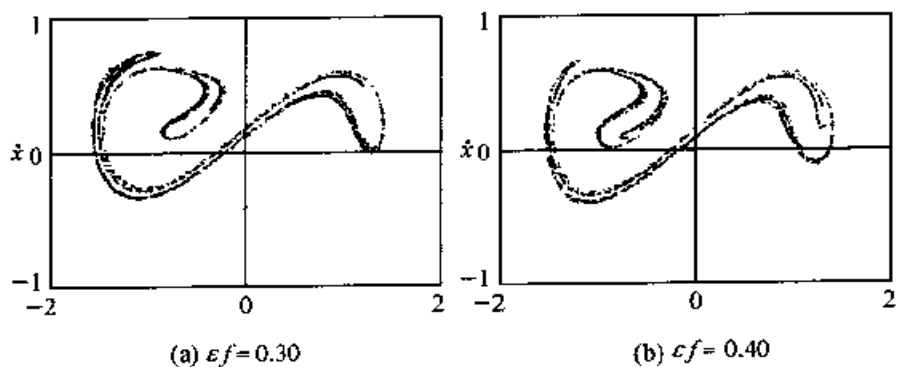


图 6.38 图 6.37 对应的混沌吸引子

系统的推广和高阶梅利尼科夫方法两方面的进展,并简要说明梅利尼科夫方法在其它相关问题中的应用。梅利尼科夫方法最初是对受周期扰动的平面可积系统提出的。以后相继推广到受近准周期扰动的有限维可积保守系统,也推广到几类受周期扰动的无穷维可积保守系统。这种推广的基础是存在同宿结构的高维映射具有类似于高维斯梅尔马蹄映射的混沌不变集。梅利尼科夫方法本质上是一种一阶近似方法。因此若平面可积系统受不同阶小量的扰动,原来的方法便无法处理。为解决这类问题,发展了高阶梅利尼科夫方法。其基本思想是在式(6.4.4)和式(6.4.5)中增加 ε 的高阶项,然后建立高阶梅利尼科夫函数。除应用于建立各类系统横截同宿点的条件以外,梅利尼科夫方法的基本思想还可用于讨论受周期扰动可积系统的亚谐波共振解和超谐波共振解的存在性。关于梅利尼科夫方法的发展和应用可参阅文献[38,42,51,71,77,78]。

6.4.4 什尔尼科夫方法

1965年什尔尼科夫建立一类三维非线性系统出现斯梅尔马蹄映射的条件。这类条件涉及鞍焦型同宿轨道的概念。三维非线性系统的平衡点 O 称为鞍焦点,如果原系统在点 O 的雅可比矩阵 3 个本征值中有 1 个为正实数,另 2 个为实部为负的共轭复数。鞍焦点具有一维的不稳定流形 $W^u(O)$ 和二维稳定流形 $W^s(O)$ 。若鞍焦点的一维不稳定流形 $W^u(O)$ 上的相轨迹 Γ 当 $t \rightarrow \pm \infty$ 时进入二维稳定流形 $W^s(O)$,则称该相轨迹 Γ 为鞍焦型同宿轨道,如图 6.39 所示。在鞍焦型同宿轨道上,当 $t \rightarrow \pm \infty$ 时相轨迹 Γ 都趋于鞍焦点 O 。什尔尼科夫证明了对于存在鞍焦型同宿轨道的系统,如果鞍焦点的正实本征值大于共轭复本征值实部的绝对值,则可在该鞍焦型同宿轨道附近构造庞加莱映射,使之具有斯梅尔马蹄映射的性质。

研究三维系统:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \beta y + P(x, y, z) \\ \dot{y} &= \beta x + \alpha y + Q(x, y, z) \\ \dot{z} &= \lambda z + R(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (6.4.6)$$

其中光滑函数 P, Q, R 及其导数在零点 $O(0,0,0)$ 处均为零。因此零点 O 为系统(6.4.6)的平衡点。若 $\alpha < 0$ 和 $\lambda > 0$,则零点 O 为系统(6.4.6)的鞍焦点。进一步假设系统(6.4.6)存在鞍焦型同宿轨道 Γ ,当 $t \rightarrow \pm \infty$ 时都趋于零点 O 。可以证明(证明思路见附录七),在本征值满足

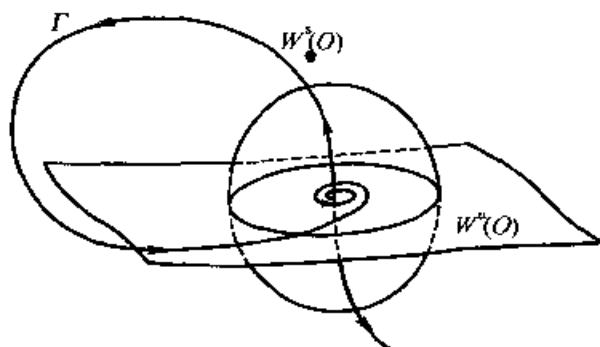


图 6.39 鞍焦型同宿轨道

$$\lambda > -\alpha > 0 \quad (6.4.7)$$

时,能够构造庞加莱映射使之具有斯梅尔马蹄映射的性质。因此若三维系统存在鞍焦型同宿轨道,且鞍焦点本征值满足条件(6.4.7),即可判断该系统存在斯梅尔马蹄映射意义上的混沌。这种方法称为什尔尼科夫方法。应用什尔尼科夫方法的关键在于判断系统是否存在鞍焦型同宿轨道。以下通过一个例子说明该方法的应用。

例 6.4-2 一类具有分段线性反馈系统混沌振动的解析预测及其数值结果。系统动力学方程为

$$\begin{cases} \ddot{x} + \beta \dot{x} + x = y \\ \dot{y} = f_\mu(x) \end{cases} \quad (a)$$

其中 $\beta > 0$, $f_\mu(x)$ 为带单参数的分段线性函数,定义为

$$f_\mu(x) = \begin{cases} 1 + ax & (x < 0) \\ 1 + \mu x & (x \geq 0) \end{cases} \quad (b)$$

其中常数 a 和 μ 均为正。

解: 在三维相空间中,系统(a)等价于自治系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -y - \beta z + f_\mu(x) \end{cases} \quad (c)$$

系统在半空间 $x \leq 0$ 和 $x \geq 0$ 中分别有平衡点 $A(-1/a, 0, 0)$ 和 $B(1/\mu, 0, 0)$ 。设式(c)右端的向量函数在点 A 处的雅可比矩阵 J_1 的本征值为 λ 和 $\rho \pm i\omega$, 在点 B 处的雅可比矩阵 J_2 的本征值为 L 和 $R \pm i\Omega$ 。为简便计,以 (ρ, ω, R) 为参数代替原来的参数 (β, a, μ) 。则可由矩阵 J_1 的本

征方程导出

$$\begin{aligned}\lambda &= (1 - \rho^2 - \omega^2)/(2\rho), \quad \beta = -(1 + 3\rho^2 - \omega^2)/(2\rho), \\ a &= (1 - \rho^2 - \omega^2)(\rho^2 + \omega^2)/(2\rho)\end{aligned}\quad (d)$$

则条件(6.4.7)写为

$$\rho^2 + 1 < \omega^2 < 3\rho^2 + 1 \quad (e)$$

由矩阵 J_2 的本征方程得到

$$\left. \begin{aligned}L &= (1 + 3\rho^2 - \omega^2)/(2\rho) - 2R \\ \Omega^2 &= 1 + 3R^2 - R(1 + 3\rho^2 - \omega^2)/\rho \\ \mu &= (4R\rho - 1 - 3\rho^2 + \omega^2)[(1 + 4R^2)\rho - R(1 + 3\rho^2 - \omega^2)]/(2\rho^2)\end{aligned} \right\} \quad (f)$$

在以下讨论中,固定参数 ρ 和 ω ,将 R 作为可变参数。

考虑 A 处的不变流形。当 $x \leq 0$ 时,式(c)为线性微分方程,可以解出对应于本征值 λ 的不稳定流形及其与平面 $x=0$ 的交点 $M(0, \lambda/a, \lambda^2/a)$ 。对应于本征值 $\rho \pm i\omega$ 的稳定流形在 A 的一个邻域中为平面 Π^- , Π 与平面 $x=0$ 相交于直线 Λ^- 。 Λ^- 的方程为

$$x = 0, \quad z = 2\rho[y + 1/(\rho^2 + \omega^2 - 1)] \quad (g)$$

直线 Λ^- 上的点可能不是 A 的稳定流形中的点。若存在 $N \in \Lambda^-$, 且当 $t=0$ 时由 N 出发的轨道对一切 $t > 0$ 都位于半空间 $x \leq 0$ 中时,则 N 属于 A 的稳定流形。

以下用构造方法说明鞍焦型同宿轨道 Γ_0 的存在, Γ_0 由三部分构成。第一部分为属于 A 的不稳定流形的线段 AM , 其中 M 位于平面 $x=0$ 上。第二部分为曲线 MN , 其中 N 为 $t=0$ 时从 M 出发的相轨迹在 $t < 2\pi/\omega$ 到达 Λ^- 上的点。该点的存在性将在下面证明,并证明 N 属于 A 稳定流形。第三部分为由 N 出发以 A 为渐近平衡点的相轨迹。

现证明上述鞍焦型同宿轨道 Γ_0 第二部分的存在性。在此部分 $x \geq 0$, $f_\mu(x) = 1 - \mu x$, 故可从方程(c)解得

$$\begin{bmatrix} x_R(t) \\ y_R(t) \\ z_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u \cos \Omega t + v \sin \Omega t)e^{Rt} + w e^{(t+1/\mu)} \\ \dot{x}_R(t) \\ \ddot{x}_R(t) \end{bmatrix} \quad (h)$$

其中常数 u, v 和 w 由 $t=0$ 时 M 的初始条件确定。分别用 E_1 和 E_2 表示平面 Π^- 所分割成的包含 M 和不包含 M 的半空间。对于适当的 ρ 和 ω , 可以找到 $0 < R_1 < R_2$ 和 $0 < t_1 < t_2 < 2\pi/\omega$, 使得

$$\left. \begin{aligned} x_R(t_1) > 0 \quad R \in [R_1, R_2], \quad x_R(t_2) < 0 \quad R \in [R_1, R_2] \\ x_{R_1}(t) \in \Xi_1 \quad t \in [t_1, t_2], \quad x_{R_2}(t) \in \Xi_2 \quad t \in [t_1, t_2] \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

根据相轨迹的连续性, 存在 $R^* \in (R_1, R_2)$ 和 $t^* \in (t_1, t_2)$ 使得 $N(x_{R^*}(t^*), y_{R^*}(t^*), z_{R^*}(t^*)) \in \Lambda^-$ 。因此同宿轨道 Γ_0 的曲线 MN 部分存在。

再证明 N 属于平衡点 A 的稳定流形。记 Π_R^+ 为包含另一个平衡点 B 局部不稳定流形的平面。将过 M 与 Π_R^+ 平行的平面记作 $\Pi_{R_1}^+$ 。则 N 属于 Λ^- 位于 Π_R^+ 和 $\Pi_{R_1}^+$ 之间的一段。设 Λ^- 与 Π_R^+ 和 $\Pi_{R_1}^+$ 的交点分别为 I_R 和 J_R , 令

$$d_1 = \sup_{R \in [R_1, R_2]} (\max\{d(A, I_R), d(A, J_R)\}) \quad (j)$$

其中 d 为通常意义下的距离。以 d_0 表示 A 到 Λ^- 的距离, 对于线段 $\bigcup_{R \in [R_1, R_2]} [I_R, J_R]$ 上任意点 N , 由 N 出发的相轨迹绕 A 半周后与 A 的距离小于 d_0 , 则可保证 N 为 A 的稳定流形上的点。为此, 选取参数 ρ, ω, R_1 和 R_2 使得

$$d_0 > d_1 e^{\rho n / \omega} \quad (k)$$

即可满足上述条件。例如, 取 $\rho = -0.4, \omega = 1.1, R_1 = 0.39$ 和 $R_2 = 0.4$ 。

由以上讨论可知, 选取 ρ 和 ω 满足式(e), 并使 ρ, ω 和 $R \in [R_1, R_2]$ 同时满足条件(i), 则存在 R^* , 使得系统(a)在参数 ρ, ω , 和 R^* 下满足什尔尼科夫方法的条件, 从而预测混沌振动。

数值计算部分地验证上述分析结果。取参数 $\rho = -0.4, \omega = 1.1$ 和 $R = 0.174$, 这组参数满足条件(e), 系统(c)呈现混沌性态, 如图 6.40 所示。值得注意的是, 什尔尼科夫方法给出的并非是混沌存在的必要条件。例如, 取不满足条件的参数 $\rho = -0.27$ 和 $\omega = 1.018$, 系统(c)仍存在混沌性态, 如图 6.41 所示。

6.4.5 混沌振动的近似解析判据

一些工程系统可以模型化为受小耗散力和周期扰动力作用的保守系统。若忽略阻尼和激励而得到的保守系统的势函数存在极小值, 则称该系统为有势阱系统。使势函数取极小值的相点为保守系统的稳定平衡点。考虑有势阱系统中的阻尼时, 稳定平衡点变为渐近稳定平衡点, 该平

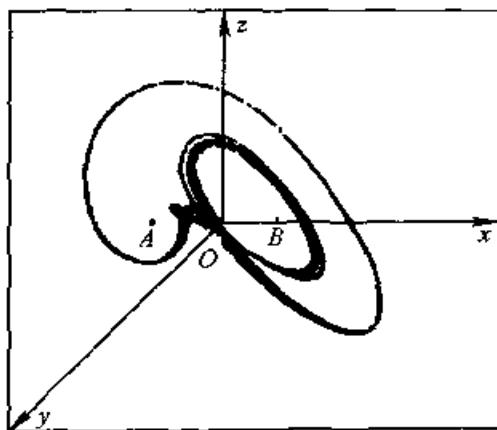


图 6.40 满足什尔尼科夫条件的混沌

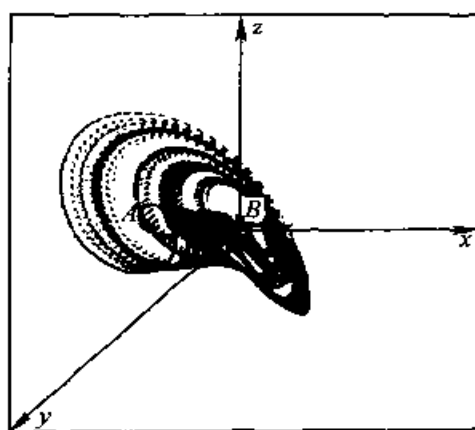


图 6.41 不满足什尔尼科夫条件的混沌

平衡点的吸引盆称为**势阱**。若同时考虑有势阱系统的阻尼和激励,系统可能出现平衡、周期运动、多周期运动、混沌运动和发散到无穷等多种运动形式。如果相应保守系统的势函数有多于一个的极小值,则称该系统为**多势阱系统**。单自由度多势阱系统可写为

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = f \cos \omega t \quad (6.4.8)$$

其中 x 为系统的广义坐标, V 为有多个极小值的势函数,如图 6.42 所示。

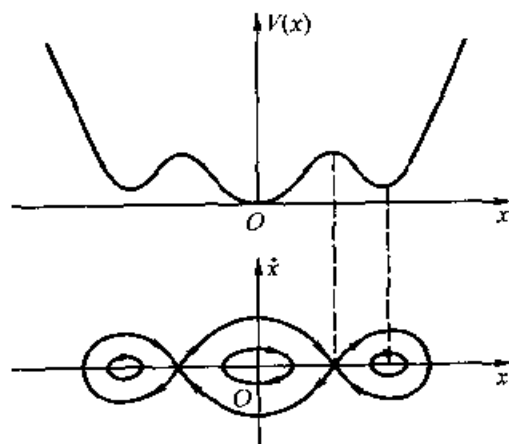


图 6.42 多势阱系统势函数与相平面图

多势阱系统受扰动后,可在势函数极小值对应的中心点周围作周期运动。当扰动较小时,这种周期运动固定在某个中心点附近保持不变。

当扰动较大时,系统的运动不再局限于固定的势阱,即不再围绕固定的中心点,而在不同的势阱之间游荡。这种情形可能导致系统出现混沌振动。

大量数值实验表明,当受扰系统广义速度的最大值 \dot{x}_m 接近于未扰系统分隔线上广义速度最大值 v_m 时,即对于接近于 1 的数 α 有

$$\dot{x}_m = \alpha v_m \quad (6.4.9)$$

系统将出现混沌振动。式(6.4.9)为多势阱系统出现混沌的一种经验判据。利用近似解析方法可以建立判据的解析形式。以下通过一个例题具体说明混沌振动近似解析判据的建立过程。

例 6.4-3 一类特殊的带负线性刚度项的达芬方程

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} - \frac{1}{2}x(1 - x^2) = f \cos \omega t \quad (a)$$

出现混沌振动近似解析判据。

解:系统(a)的未扰系统的势函数为

$$V(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^4 \quad (b)$$

有 2 个极小值 $x = \pm 1$ 。未扰系统的分隔线方程为

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^4 = 0 \quad (c)$$

可导出最大速度为

$$v_m = \frac{1}{2} \quad (d)$$

利用谐波平衡法分析受扰系统的运动。设系统(a)在其未扰系统的相平面右侧中心点(1,0)周围的周期轨道为

$$x = 1 + A \cos(\omega t + \theta) \quad (e)$$

将式(e)代入式(a),并略去高次谐波项,整理得到

$$A^2 \left\{ \left[(1 - \omega^2) - \frac{3}{2}A^2 \right]^2 + \gamma^2 \omega^2 \right\} = f^2 \quad (f)$$

式(e)确定的最大运动速度为

$$\dot{x}_m = \omega A \quad (g)$$

将式(d)和(g)代入式(6.4.26),解出 A 代入式(f),得到周期扰动力幅值 f 的临界值:

$$f_c = \frac{\alpha}{2\omega} \left\{ \left[(1 - \omega^2) - \frac{3\alpha^2}{8\omega^2} \right]^2 + \gamma^2 \omega^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (h)$$

从而导出达芬方程(a)出现混沌运动条件的经验-解析预测公式:

$$f > \frac{\alpha}{2\omega} \left| \left[(1 - \omega^2) - \frac{3\alpha^2}{8\omega^2} \right]^2 + \gamma^2 \omega^2 \right|^{\frac{1}{2}} \quad (i)$$

其中的系数 α 由实验确定。

图 6.43 所示弹性梁在磁场中的运动为典型的双势阱系统。这种在磁场中运动的弹性元件也有广泛的工程背景,如发电机、电动机等。取该系统的一阶模态可以得到例 6.4-3 的方程(a)。从图 6.44 所示运动时间历程的实验结果和数值结果的比较可看出,二者的规律定性一致。

将例 6.4-3 中方程(a)混沌振动预测的解析结果例 6.4-1 的式(q)、经验-解

数值结果



实验结果



图 6.44 运动时间历程的实验结果与数值结果比较

析结果例 6.4-3 的式(i)与实验结果比较,如图 6.45 所示。在例 6.4-1 的式(q)中取 $a = c = 1/2$ 。在例 6.4-3 的式(i)中由实验确定 $\alpha = 0.86$ 。由此可见,经验-解析预测的结果比解析预测的结果更接近实验结果。

由以上讨论可知,在混沌振动经验判据的基础上,利用基本的近似解析方法如谐波平衡法便可以得到与实验接近的结果。对于特定的非线性系统,基于各类出现混沌运动的经验判据,也可以应用其它的近似解析解法。产生混沌的一种途径为倍周期分岔,利用多尺度法可以确定倍周期运动及其稳定性条件从而预测混沌振动。数值实验表明,某些非线性系

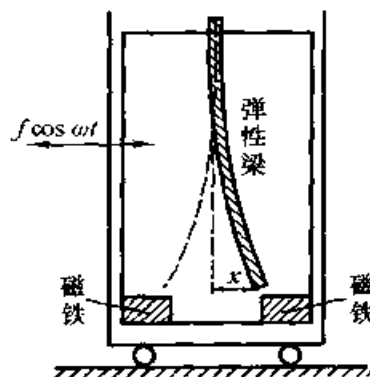


图 6.43 弹性梁在磁场中的强迫振动

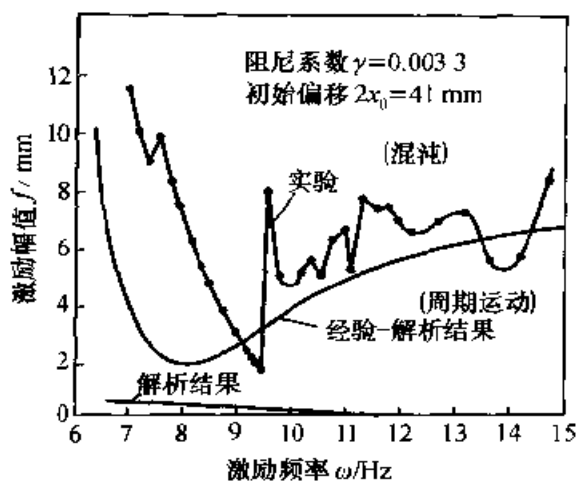


图 6.45 混沌振动预测的解析结果,经验-解析结果与实验结果的比较

统亚谐波振动失稳时可导致混沌振动。利用近似解析解法可以确定亚谐波振动,再进行稳定性分析便可得到预测混沌振动的判据。数值实验还表明,某些非线性系统发生跳跃现象时,在跳跃过程中可出现混沌振动。用近似解析解法和稳定性分析可以建立这类系统出现混沌振动的判据。

混沌振动的经验-解析预测的一般过程为:根据物理或数值实验发现某类非线性系统出现混沌振动的条件,然后应用近似解析方法建立预测混沌振动判据的解析表达式。其中可能含有一些需要由实验确定的系数,可根据实验结果确定这些系数。经验-解析预测的结果一般比较接近实验结果,但只能处理比较具体的某类非线性系统,适用范围比较窄;而且本质上是一种经验公式,缺乏充分的理论基础。非线性振动近似解析方法在经验-解析预测中有广泛的应用。关于混沌振动的经验-解析预测的研究进展可参阅文献[95]。

§ 6.5 哈密顿系统的混沌振动

6.5.1 哈密顿系统和 KAM 定理

n 自由度的动力学系统可以用 n 个广义坐标 $q_i (i=1, 2, \dots, n)$ 和 n 个广义动量 p_i 描述其运动状态。全体 (q_i, p_i) 的集合构成 $2n$ 维相空间 (q, p) 。不受非有势力作用时,哈密顿(W. R. Hamilton)在 1834 年建立了形式为

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (6.5.1)$$

的运动微分方程,称为哈密顿正则方程。式(6.5.1)中

$$H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (6.5.2)$$

称为系统的哈密顿函数。对于力学系统, H 为系统的能量。用正则方程描述的动力学系统称为哈密顿系统。若 $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 不显含时间, 由式(6.5.1)导出

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + 0 = 0 \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

即 H 在系统运动过程中不随时间 t 变化, H 为守恒量。这类系统称为保守系统。若 H 显含时间 t , 将原来 $2n$ 维相空间增广为 $2(n+1)$ 维相空间 $(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$, 其第 $n+1$ 个广义坐标为 $\bar{q}_{n+1} = t$, 第 $n+1$ 个广义动量为 $\bar{p}_{n+1} = -H$, 增广系统的哈密顿函数定义为

$$\bar{H}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, q_{n+1}) + p_{n+1} \quad (6.5.4)$$

相应的正则方程为

$$\dot{\bar{q}}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i}, \quad \dot{\bar{p}}_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n+1) \quad (6.5.5)$$

根据定义, 式(6.5.5)和(6.5.4)与式(6.5.1)和(6.5.2)等价, 但增广系统的函数不显含时间, 为保守系统。因此, 任意哈密顿系统都可以转化为保守系统, 以下仅考虑保守哈密顿系统。

哈密顿系统往往可以通过适当的变换而得到实质性的简化。变量 (\mathbf{q}, \mathbf{p}) 到 (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) 的变换, 一般可以写为

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (6.5.6)$$

微分方程组(6.5.1)相应地变换为

$$\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \quad \dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \quad (6.5.7)$$

若式(6.5.7)仍具有正则方程(6.5.1)的结构, 即存在变换了的哈密顿函数 $h(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ 使得

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial h}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial h}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.5.8)$$

则变换(6.5.6)称为正则变换。即相空间中将任意正则方程仍然变为正则方程的变换称为正则变换。可以验证, 正则变换的逆变换也是正则变

换;两个正则变换的复合仍是正则变换。

若能构造正则变换将变量 (q, p) 变为变量 (I, θ) , 使得用新变量 (I, θ) 表示的哈密顿函数仅依赖于 I , 而与 θ 无关, 即

$$H = H(I) \quad (6.5.9)$$

相应的哈密顿方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_i &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} = 0 \\ \dot{\theta}_i &= \frac{\partial H}{\partial I_i} = \Omega_i(I_1, I_2, \dots, I_n) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.5.10)$$

从微分方程组(6.5.10)可积分得到

$$\left. \begin{aligned} I_i(t) &= I_i(0) \\ \theta_i(t) &= \Omega_i(I_1(0), I_2(0), \dots, I_n(0))t + \theta_i(0) \end{aligned} \right\} \quad (6.5.11)$$

其中 $2n$ 个由初始条件确定的常数 $I(0)$ 和 $\theta(0)$ 可以由 $(q(0), p(0))$ 得到。 (I, θ) 称为作用-角度变量。根据式(6.5.11), 对于给定的初值, 系统(6.5.10)的运动由 n 个角度坐标 θ_i 唯一地确定。 n 维流形上的点由 n 个角度确定时, 称为 n -环面。 1 -环面即是圆周, 2 -环面为通常的环面, $n \geq 3$ 时 n -环面不能在三维物理空间中图示。可积系统的相轨迹分布在该 n -环面上。若 Ω_i 非有理通约, 即不存在不同时为零的整数 k_i

使得 $\sum_{i=1}^n k_i \Omega_i = 0$, 则相轨迹在 n -环面上不闭合地无穷环绕。此时可以证明相轨迹在环面上是稠密的, 系统(6.5.10)的运动是准周期的。若 Ω_i 有理通约, 则相轨迹在 n -环面上闭合, 不是稠密的, 系统(6.5.10)的运动为周期的。

上述用作用-角度变量表示的哈密顿系统是可积系统。一般地, n 自由度哈密顿系统称为可积系统, 若存在 n 个彼此独立的孤立运动积分

$$I_i(q, p) = C_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.5.12)$$

其中 C_i 为常数。函数 I_i 彼此独立是指相应的微分 dI_i 彼此线性无关。1918 年诺特(E. Noether)揭示了孤立运动积分的存在产生于系统的对称性, 即系统在某种变换下的不变性。时间在平移变换下的不变性(时间的均匀性)导致能量积分的存在。空间在平移变换下的不变性(空间的均匀性)导致动量积分的存在。空间在转动变换下的不变性(空间的各向同性)导致动量矩积分的存在。对于 n 自由度可积系统, 由于 n 个孤立运动积分的存在, 系统在 $2n$ 维相空间中的运动限制在一个与 n 维环面同

胚的 n 维流形上。由于从其上出发的相轨迹始终留在该流形内, 这些流形称为不变环面。系统用作用-角度变量表示时, 作用变量 I_i 给出 n 维环面的 n 个半径, 角度变量 θ_i 是在环面上的 n 个坐标。因此, 可积系统的运动只能是周期的或准周期的, 不存在混沌运动。

1892 年庞加莱证明包括三体问题在内的许多经典动力学问题是不可积的。不可积的系统称为不可积系统。事实上, 任取一个二自由度以上的哈密顿系统, 它几乎一定是不可积的。可积的系统是如此稀少, 以至于不可能用可积系统逼近不可积系统。然而, 目前尚无根据哈密顿函数判别系统是否可积的简单判据。由可积系统附加小扰动而形成的不可积系统称为近可积系统。利用作用-角度变量, 近可积系统的哈密顿函数可写作

$$H(I, \theta) = H_0(I) + V(I, \theta) \quad (6.5.13)$$

其中 V 充分小。若不存在不可积扰动, 即 $V=0$, 此函数对应的哈密顿系统为可积的, 其解具有式(6.5.11)给出的简单形式。当 $V \neq 0$ 时, 在一般情形下可积性受到破坏。

1954 年柯尔莫戈洛夫揭示了近可积哈密顿系统与相应的可积系统之间的关系, 随后其结果由阿诺德(V. A. Arnol'd)和莫泽(J. Moser)严格证明并改进而称为 KAM 定理。KAM 定理的证明需要较多数学知识, 这里仅不加证明地给出结论。

KAM 定理: 设系统的哈密顿函数(6.5.14)满足以下条件

(1) $H(I, \theta)$ 在区域 $\Sigma_0: |\operatorname{Im} \theta| \leq t, |I - I_0| \leq s$ 内实解析;

(2) 在 I_0 计算的 $\Omega_j = \frac{\partial H_0}{\partial I_j}$ ($j=1, 2, \dots, n$) 使得 $\left| \frac{\partial \Omega_j}{\partial I_k} \right| \neq 0$ (非退化条件);

(3) 对任意非零整数向量 $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, 存在正数 $C(\Omega) > 0$ 和 $\mu > n-1$ 成立非共振条件:

$$\left| \sum_{j=1}^n k_j \Omega_j \right| \geq C \left(\sum_{j=1}^n |k_j| \right)^{-\mu} \quad (6.5.14)$$

则对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon, C, \mu, s, t)$, 如果在 Σ_0 内 $|V| < \delta$, 则方程

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I}, \quad \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (6.5.15)$$

的相轨迹在 n 维不变环面

$$I = I_0 + \Gamma(\Theta), \quad \theta = \Theta + \Phi(\Theta) \quad (6.5.16)$$

上,其中 Γ 和 Φ 是在 $|\operatorname{Im} \Phi| \leq t/2$ 上周期为 2π 的实解析函数,此不变环面上的相轨迹由方程

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\partial H}{\partial I} \Big|_{I=I_0} t \quad (6.5.17)$$

确定,且该不变环面充分接近相应的可积系统的不变环面,即

$$|\Gamma| + |\Phi| < \epsilon \quad (6.5.18)$$

KAM 定理的条件包括四个方面:导致不可积的扰动充分小、 H 解析、系统非退化和相应的可积系统离开共振一定距离,其中 H 解析和非退化条件可以适当减弱。在这些条件下,多数非共振环面不消失,仅有轻微变形,因此在受扰动系统相空间中仍然存在不变环面,它们被相轨迹稠密地充满。环面的独立频率数目等于系统的自由度数。

KAM 定理成立时, n 自由度近可积哈密顿系统的相轨迹位于 $2n$ 维相空间中一个 n 维环面上,此环面称为 KAM 环面或 KAM 曲面。

6.5.2 从局部随机层到全局混沌

讨论近可积哈密顿系统在发生共振时的情形。对于相应的未受摄动的可积系统而言。诸 Ω_i 为有理通约时,式(6.5.11)给出的运动构成 n 维环面 T_n 上的周期轨道。保守系统总存在能量积分,因此给定初始能量后, $2n$ 维系统相空间被约束在等能面上,为 $2n-1$ 维。与环面 T_n 横截相交的 $2n-2$ 维截面 Σ 定义了系统的庞加莱映射 P_0 。截面 Σ 与环面 T_n 相交形成等势线 Γ 。在共振情形,相轨迹为封闭曲线,对 Γ 上每一点存在正整数 k 使得该点为 P_0 的 k 周期点。存在摄动时,截面 Σ 在等能面上环面 T_n 的邻域仍定义了庞加莱映射 P ,等势线 Γ 的变化反映了相应环面 T_n 的变化。

若映射 M 作用下相空间的体积保持不变,则映射 M 称为哈密顿映射。哈密顿系统的庞加莱映射为哈密顿映射。可以证明,对任意正整数 k ,映射 M^k 的不动点只能为鞍点或中心。为突出问题的实质,仅考虑二维哈密顿映射,即对应于二自由度哈密顿系统的庞加莱映射,此时相空间为四维,约束在等能面上为三维,庞加莱截面 Σ 为二维,与二维环面相交得到一维的等势线 Γ 。 $z_0 \in \mathbb{R}^2$ 若满足 $M^k(z_0) = z_0$,即 z_0 为 M 的 k 周期点,则 z_0 在计算的二维映射 M^k 的雅可比矩阵本征值 λ_1 和 λ_2 满足 $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ 。因此有 $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ 或 λ_1 和 λ_2 为单位模共轭复数,分别将

相应的周期点 z_0 称为双曲点和椭圆点。

1935 年伯克霍夫在 1899 年庞加莱工作的基础上,证明了通常所称的伯克霍夫-庞加莱定理。在充分小的摄动下,对正整数 k 等势线 Γ 破裂为庞加莱映射 P 的 $2mk$ (m 为正整数)个 k 周期点,这些周期点在 Γ 的邻域,其中 mk 个为双曲点, mk 个为椭圆点。 $mk=3$ 的情形如图 6.46 所示。 Γ 称为共振等势线,包含双曲点和椭圆点的 Γ 的邻域称为共振带。双曲点之间由异宿轨道连接形成分界线。根据上节的分析,若存在横截异宿点将导致复杂的动力学行为,如图 6.47 所示。这种哈密顿系统中稳定流形和不稳定流形无限次横截相交形成复杂的几何结构称为随机层。在分界线之内由未破裂等势线形成的环绕椭圆点的区域称为孤岛。在多个椭圆点的情形,孤岛将形成岛链。

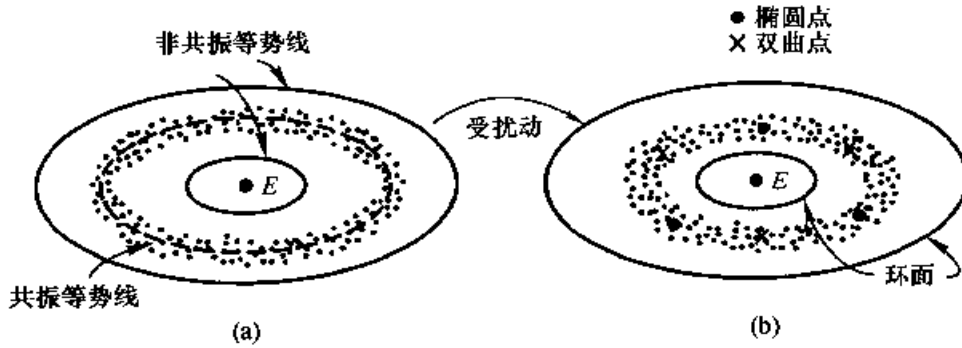


图 6.46 等势线破裂为椭圆点和双曲点

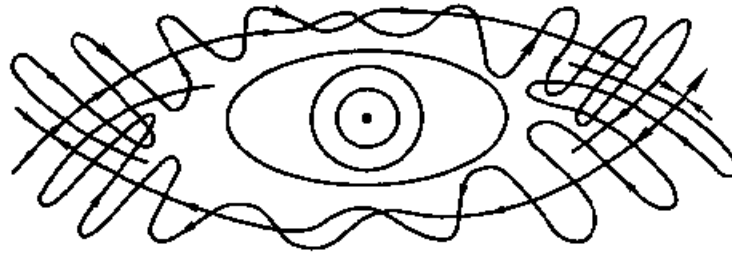


图 6.47 哈密顿系统中的随机层

等势线破裂而形成的椭圆点在其小邻域内被较小的等势线包围。共振情形的等势线将进一步按庞加莱-伯克霍夫定理破裂为椭圆点和双曲点。这种性态无穷重复,具有自相似性,如图 6.48 所示。同时,在任意椭圆点的邻域中,也存在非共振而没有破裂的等势线。此时系统同时存在在非共振等势线上的规则运动和在共振带中随机层上的混沌运动。注意

到庞加莱映射的等势线对应于 KAM 环面,因此在可积系统受到小扰动时,仍然存在非共振 KAM 环面和破裂的共振 KAM 环面产生的椭圆点和双曲点,形成复杂的几何结构。二自由度的情形如图 6.49 所示。这种具有自相似性的几何结构被亚伯拉罕(R. Abraham)和马斯登(J. E. Marsden)称为柯尔莫戈洛夫含混吸引子,虽然在哈密顿系统中并不存在真正的吸引子。

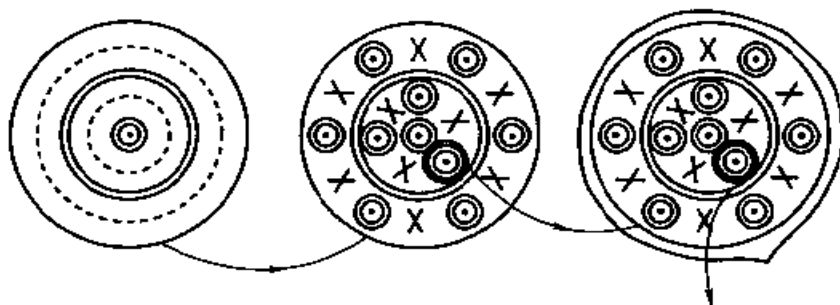


图 6.48 椭圆点邻域的自相似性

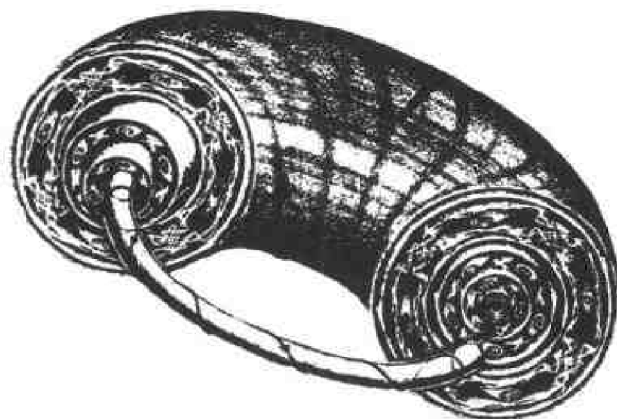


图 6.49 柯尔莫戈洛夫含混吸引子

随机层对哈密顿函数的任意小摄动均存在,但当摄动很弱时,随机层也很小,以至于在数值实验中无法发现,系统呈现规则的运动性态。对于稍强的摄动,出现可以观测到的随机层,但根据 KAM 定理,非共振的 KAM 环面仍存在,随机层被 KAM 环面所分割。这种被 KAM 环面所分割的不规则运动称为局部混沌。随着摄动的增强,分隔相邻随机层的 KAM 环面将逐个破裂,随机层也相应变大。对于充分大的摄动,不同的共振带将发生重叠,随机层不再被 KAM 环面分隔而连成一片,这种混沌运动称为全局混沌。在全局混沌的情形,仍可能存在未被摄动破坏的

KAM 环面,形成混沌海洋中大小不等的规则运动孤岛。岛内又可以有尺度更小的 KAM 环面,因此全局混沌呈现出非常复杂的胖分形结构。

揭示不可积哈密顿系统性态的一个著名例子是 1964 年埃依(M. Henon)和海尔斯(C. Heiles)所讨论的模型。该模型可用于描述涡旋星系柱对称引力场中粒子的运动,也可作为描述圆环上具有指数衰减型排斥的三粒子晶格(该模型本身是可积系统)略去 4 次以及更高次项的近似。

例 6.5-1 哈密顿函数为

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2) + \left(q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3\right) \quad (\text{a})$$

的保守系统的局部混沌和全局混沌。^[66]

解: 式(a)右端前一个括号为可积系统,受后一个括号的摄动,成为不可积系统。式(a)的等能面为三维。取截面 $q_1 = 0$, 得到庞加莱映射。数值实验表明,随着系统能量 h 的增加,系统的动力学行为由规则变为混沌,庞加莱映射如图 6.50 所示。当 $h = 1/24$ 时,系统整体上呈现规则运动,存在 4 个椭圆点由连接 3 个双曲点的分界线包围,如图 6.50a 所示。但局部放大显示,也存在很薄的随机层。当 $h = 1/8$ 时,存在着如 $h = 1/24$ 时的规则运动,也存在 5 个小岛链表示的周期 5 运动(轨道从一个岛跃向另一个岛),还存在在大区域中游荡的轨道所表示的不规则运动,如图 6.50b 所示。当 $h = 1/6$ 时,出现全局混沌,几乎不存在规则运动,如图 6.50c 所示。

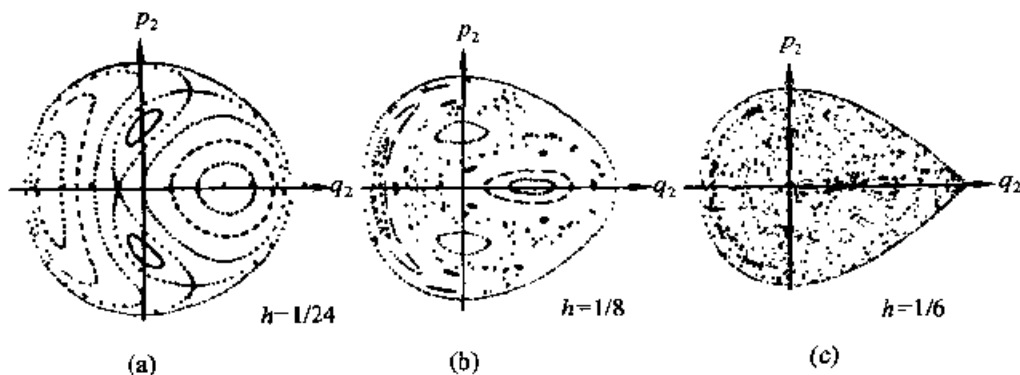


图 6.50 埃依-海尔斯系统的庞加莱映射

6.5.3 阿诺德扩散

对于 n 自由度可积哈密顿系统(6.5.9),其运动被限制在 $2n$ 维相空

间中的 n 维环面(6.5.11)上。如果可积系统受到扰动,根据前面的分析,将在 $2n-1$ 维等能面和 $2n-1$ 维共振面 $\sum_{i=1}^n k_i \Omega_i(J_0) = 0$ (k_i 为不同吋为零的整数)相交处的邻域内出现随机层。等能面与共振面相交在 $(2n-1)-1=2n-2$ 维曲面上,环绕该曲面的随机层所占据的空间为 $(2n-2)+1=2n-1$ 维。共振面和等能面的相交形成各种曲线,它们彼此相交构成互相连通的复杂网络。这种遍布等能面的网络称为阿诺德网络。

在 m 维空间中,一个 $m-1$ 维闭曲面,例如 $m-1$ 维环面,才有可能将该空间分隔为互不连通的两部分。而维数低于 $m-1$ 的闭曲面做不到这一点。在 n 自由度的哈密顿系统中,KAM 环面仅有 n 维。因此,仅当 $(2n-1)-1=n$ 即 $n=2$ 时,KAM 环面才能将相空间分隔成互不连通的两部分,即可以包围随机层。注意到 KAM 环面存在于近可积哈密顿系统中,在 KAM 环面上任一点的轨道上相应的作用量变化很小,因此 KAM 环面之间的运动所引起的作用量变化也很小。KAM 环面对随机层的限制作用为 2 自由度系统所特有。当 $n \geq 3$ 时, $2n-1$ 维环面不可能将 n 维空间分隔成互不连通的两部分。因此即使存在充分多的 KAM 环面,等能面上相点的作用量变化仍然可能很大。此时不可积扰动的存在使得阿诺德网络被随机层包围,相点可以沿阿诺德网络随机运动面绕过任何 KAM 环面,并能到达相空间的任意处。这种多自由度哈密顿系统的随机运动称为阿诺德扩散。

一般自由度 $n \geq 3$ 系统的阿诺德网络的结构由与扰动无关的共振面和等能面确定。因此其结构与扰动强度无关,而只取决于未受扰动的可积系统的结构。所有阿诺德扩散不存在扰动强度的临界值问题,在任何扰动强度下都存在着全局性的阿诺德扩散。它是一种具有重要实际意义的现象,例如在太阳系稳定性问题中就存在这种现象,尽管阿诺德扩散的机制和图像尚不十分清楚,但目前已明确,阿诺德扩散的速度非常缓慢。对于扰动量级为 ϵ 的近可积系统,可以证明,当相应的可积系统满足一定条件时,对于充分小的扰动,系统动量变化满足

$$\|p(t) - p(0)\| < \epsilon^a \quad t \in \left[0, \frac{1}{\epsilon} e^{\epsilon^{-b}}\right] \quad (6.5.19)$$

其中 a 和 b 是与未受摄动的可积哈密顿函数有关的正常数。

6.5.4 天体和航天器混沌姿态运动研究概述

天体系统是典型的哈密顿系统。习惯上认为太阳系的运动是非常规则的运动,但现在已发现太阳系中存在混沌运动。土星的卫星土卫七是高度非球对称,因而具有很强的姿态和轨道运动的耦合。1984年威兹德姆(J. Wisdom)的分析结果表明有混沌运动存在,并通过数值计算得到验证。天文观测表明,土卫七确实在作不规则的翻滚,并且转动速度经常发生变化。类似的分析可以说明,所有形状不规则的星体在其演化过程中的某一阶段均存在混沌姿态运动。

航天器保持正确姿态对于航天器的有效载荷,如通讯天线、太阳能帆板、探测仪器、航天机械臂等的正常工作至关重要。因此在刚体动力学基础上对航天器绕质心姿态运动的研究有着重要意义,它可以了解和预测航天器的姿态坐标在外界力矩和各种耦合效应作用下的变化。以往的工作侧重讨论各类航天器的稳定性问题。随着非线性动力学研究热潮的兴起及相关知识在工程界的传播,在九十年代前后对航天器姿态动力学中的混沌问题也开始研究。航天器混沌姿态运动的研究不仅为混沌问题提供了物理和工程背景,也给航天器姿态动力学提供一个新的视角。由于航天器的运动空间不受约束,万有引力场和其它力场均有明确规律可循,因此与一般工程问题相比,力学模型更符合实际,数学模型也更为明确。在现有理论工具主要适用于低维系统的条件下,航天器更适宜成为混沌理论研究的具体对象。

在万有引力场中沿椭圆轨道运动的单体航天器,在适当参数和初值条件下,可能出现混沌姿态运动。除受中心万有引力场单独作用以外,混沌也出现在受到其它力场作用的航天器姿态运动中。例如航天器在磁场和引力场共同作用下的运动,航天器在两个中心万有引力场中的运动,航天器在太阳光压作用下的运动等。多体航天器混沌姿态运动的研究主要针对三类模型:带自旋转子的陀螺体航天器、绳系卫星和带挠性联结的非自旋双体航天器。忽略耗散作用时,均可作为哈密顿系统处理。其混沌运动可以用庞加莱截面映射、相轨迹和李雅普诺夫指数等进行数值识别,也可以用梅利尼科夫方法进行解析预测。

哈密顿系统是一个重要的研究专题,参阅文献[16,46,55,66,88,99,102,114]。关于航天器姿态运动的非线性动力学问题,参阅文献[116,121,126]。

§ 6.6 混沌振动的控制

6.6.1 控制混沌问题

控制混沌的含意非常广泛。一般而言,是指改变系统的混沌性态使之呈现或接近呈现周期性动力学行为。具体而言,控制混沌有三方而含意,其一是混沌的抑制,即消除系统的混沌运动,而无需考虑所产生运动的具体形式;其二是混沌轨道的引导,即在相空间中将混沌轨线引入事先指定的点或周期性轨道的确定的小邻域内;其三是混沌的控制,即通过施加控制使混沌系统呈现事先要求的周期性动力学行为;其中一种重要的特殊情形是混沌的镇定,即使稠密嵌入相空间中混沌吸引子内的无穷多不稳定周期轨道之一稳定化。混沌的抑制含意最为广泛,只需消除系统的混沌状态。混沌轨道的引导往往只是实施控制的准备。混沌的控制问题含意最为严格,受控系统以事先确定的周期和幅值运动,在作为特例的镇定问题中跟踪目标受原系统方程的约束。因此狭义的控制混沌只包括混沌的控制问题,尤其是镇定问题,本节只涉及控制混沌的这个方面。

控制混沌的研究兴起于 1989 年,有三种不同的控制方案问世。第一种方案为共振控制,通过引入一类无反馈外激励型控制使系统呈现事先指定的周期性态;第二种方案是建立一种有反馈的参数修改机制来控制同宿轨道;第三种方案是系统理论的应用,分别利用统计性预测和基于滤波的状态估计器等随机控制方法控制混沌系统。真正引起广泛重视的工作是 1990 年奥特、格列鲍吉和约克的一篇短文,其中提出了利用参数反馈镇定构成混沌吸引子的任意不稳定周期性轨道的方法,即后来所称的 OGY 方法。这种控制方法与实验有着密切联系,因此很快便应用于实验研究。

控制混沌研究引起广泛重视并非偶然。从非线性动力学自身发展逻辑来看,确定性混沌的研究大体经历了三个阶段。先是从有序到混沌,研究混沌产生的条件、机制和途径;再是混沌中的有序,研究混沌中的普适性、统计特征及分形结构等;然后则是从混沌到有序,即主动地驾驭混沌达到有序。从这个意义上,可以认为控制混沌的研究标志着混沌研究进入一个新的阶段。控制混沌是混沌理论走向应用的第一步,它不仅能对混沌有害的一面予以消除,例如,在实验室中已成功地用电信号控制动物

心脏的不规则跳动,进而可用于治疗心房和心室纤维颤动,甚至有可能研制出采用控制混沌技术的心脏整律器和去纤颤器。更重要的是控制混沌可以利用混沌有益的一面,例如,在航天技术中,由于三体问题的不稳定性,可以利用很少的剩余燃料使宇宙飞船飞行5千万英里穿越太阳系。又例如,考虑到混沌与信息处理的密切关系,控制混沌技术有可能应用于保密通讯,这已在控制混沌非线性电路的实验中得到证实。此外,系统处于混沌态时很容易实现不同运动之间的转化。因此设计多用途系统时可以考虑使系统处于混沌态,以提高系统的灵活性。

随着研究的深入,混沌系统的控制内容愈来愈丰富。混沌同步化是一种特殊的混沌系统控制问题,其特殊之处在于控制目标是混沌运动。混沌同步化有两类问题。一类是非线性系统内部的同步化,以具有正李雅普诺夫指数的不稳定部分的混沌输出为驱动信号,以具有负李雅普诺夫指数的稳定部分为响应系统,使其输出与混沌驱动同步化。另一类是两个不同的混沌系统进行耦合或施加外部驱动,使两个混沌系统的响应同步化。控制混沌的逆问题,瞬态混沌向混沌的转化、混沌的保持和非混沌系统的混沌化及其实验室实现的研究工作也在进行。在控制混沌研究的基础上,还提出了控制复杂性的概念,以实现多稳态运动系统中不同运动的转换。值得重视的还有利用噪声和混沌控制非混沌系统,先用噪声使非混沌系统进入混沌状态,然后采用控制混沌方法镇定目标周期轨道,最后去掉噪声。另一类重要问题,湍流的反馈控制也与控制混沌相关。

本节仅叙述控制混沌的基本思路,对这一专题的全而论述可参阅文献[72~74,82,92~94,103~106,109,110,112,117~119,124,128,129,131]。

6.6.2 混沌的镇定控制

镇定控制是研究和应用较多的一种控制方案。它基于混沌吸引子的几何结构。采用镇定控制时,控制目标必须是稠密嵌入混沌吸引子的无穷多个不稳定周期轨道之一,通过系统可控参数的反馈摄动使不稳定周期轨道稳定化。为突出该方案的实质,这里仅讨论不动点的镇定。

先讨论带控制参数的二维映射:

$$z_{i+1} = M(z_i, u_i) \quad z_i \in \mathbb{R}^2 \quad (6.6.1)$$

不加控制,即 $u_i = 0$ 时,系统(6.6.1)有混沌吸引子,其中含有不稳定不动点

$$z_F = M(z_F, 0) \quad (6.6.2)$$

作为控制目标。在 $(z_F, 0)$ 的邻域内将式(6.6.1)局部线性化,得到

$$z_{i+1} - z_F = D_z M(z_i - z_F) + \frac{\partial M}{\partial u_i} u_i \quad (6.6.3)$$

其中 2×2 矩阵 $D_z M$ 和二维向量 $\partial M / \partial u$ 均在(6.6.1)计算。设 $D_z M$ 有本征值 λ_s 和 λ_u ,且 $|\lambda_s| < 1$, $|\lambda_u| > 1$, λ_s 和 λ_u 对应的本征向量 e_s 和 e_u 给出不动点的局部稳定流形和局部不稳定流形。设向量 f_s 和 f_u 满足

$$f_s^T \cdot e_s = f_u^T \cdot e_u = 1, \quad f_s^T \cdot e_u = f_u^T \cdot e_s = 0 \quad (6.6.4)$$

则有

$$D_z M = \lambda_s e_s f_s^T + \lambda_u e_u f_u^T \quad (6.6.5)$$

取控制律为

$$u_i = - \frac{\lambda_u}{f_u \cdot \frac{\partial M}{\partial u_i}} f_u \cdot (z_i - z_F) \quad (6.6.6)$$

时,由式(6.6.3),(6.6.4)和(6.6.5)可以验证:

$$f_u \cdot (z_{i+1} - z_F) = 0 \quad (6.6.7)$$

式(6.6.7)表明施加控制律(6.6.6)时,可以使 z_{i+1} 进入 z_F 的局部稳定流形,此后可以不施加控制,即 $u_i = 0$ 。一旦 z_{i+1} 又离开 z_F 的局部稳定流形,控制律(6.6.6)再起作用。这一思想最初由奥特、格鲍吉和约克提出的,一般称为 OGY 方法。

上述思路可以推广到更一般的情形。考虑有可控参数 u 的 n 维映射:

$$z_{i+1} = M(z_i, u_i) \quad z_n \in \mathbb{R}^n \quad (6.6.8)$$

$u_i = 0$ 时系统(6.6.8)的混沌吸引子含有不稳定不动点

$$z_F = M(z_F, 0) \quad (6.6.9)$$

作为控制目标。将式(6.6.8)在 $(z_F, 0)$ 的邻域内作线性近似,得到

$$z_{i+1} - z_F = A(z_i - z_F) + B u_i \quad (6.6.10)$$

其中关于 z 和 u_i 的雅可比矩阵 $A = D_z M(z, u_i)$ 和 $B = D_u M(z, u_i)$ 均在 $(z, u_i) = (z_F, 0)$ 计算。为镇定 z_F ,设控制参数 u_i 遵循线性控制律:

$$u_i = k^T(z_i - z_F) \quad (6.6.11)$$

其中 k^T 是待定的 n 维向量 k 的转置,将式(6.6.11)代入式(6.6.10)有

$$z_{i+1} - z_F = (A + Bk^T)(z_i - z_F) \quad (6.6.12)$$

由式(6.6.12)可知,若 $A + Bk^T$ 的所有本征值的模都小于 1,则 z_F 便成为稳定不动点。因此问题转化为已知 A 和 B 时确定 k 使 $A + Bk^T$ 的本征值模都小于 1。这恰是线性系统控制理论中的极点配置问题,已有标准的解法。显然, k 的选择不是唯一的,一种自然而有效的选择是取 k 使 A 的 n_s 个小于 1 的本征值不变,而将其余 $n - n_s$ 个本征值置零。这意味着控制律(6.6.11)成立时,可使 z_{i+1} 进入 z_F 的局部稳定流形,随后不进行控制。一旦 z_{i+1} 又离开 z_F 的局部稳定流形,式(6.6.11)再起作用。OGY 方法的推广和变形通称为镇定控制。

镇定控制的特点可以概括为以下几个方面:首先,镇定控制在理论上是针对映射提出的,但借助庞加莱映射也可控制连续动力学系统的混沌。其次,镇定控制的局限是系统必须是耗散的和混沌的,有混沌吸引子,且控制目标必须是稠密嵌入混沌吸引子的不稳定轨道之一。即镇定控制只能解决混沌的镇定问题。第三,镇定控制要求已知或可从数据中构造出映射的模型或非线性系统的庞加莱截面映射,但对精度要求不高。第四,镇定控制仅在控制目标的邻域内是可行的,故要求系统的动力学行为为先要接近控制目标,单纯利用混沌行为的遍历性可能需要很长时间,利用混沌行为的初态敏感性可借助小摄动使系统轨道迅速进入目标邻域,这便是轨道引导技巧。最后,镇定控制原则上可应用于有随机噪声背景的控制混沌问题,但随机噪声将使所需的参数摄动值增大,而且也可能激起阵发混沌导致控制失效。

6.6.3 混沌的输送控制及其发展

经典非线性振动理论中弱非线性系统频率拖带的概念在适当条件下可用于将混沌转化为周期运动。由此杰克逊(E. A. Jackson)提出一种控制混沌的方案,称为输送控制。是早期共振控制的发展与完善。

耗散系统的混沌和周期性稳定轨道都是吸引子,因此可以假设带控制参数的 n 维非线性系统:

$$\dot{x} = f(x) + u \quad x, u \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^1 \quad (6.6.13)$$

在相空间 \mathbb{R}^n 中存在收敛域:

$$C(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \delta_{ij} \lambda_i(x) \right) = 0, \operatorname{Re} \lambda_i(x) < 0 \right. \right\} \quad (6.6.14)$$

使得临近的轨道沿着 n 个本征方向收敛。若给定收敛域中的目标 $x^g(t)$, 则可对系统(6.6.13)实施控制,

$$u = F(\dot{x}^g, x^g) = \dot{x}^g - f(x^g) \quad (6.6.15)$$

容易证明 $x(t) = x^g(t)$ 是式(6.6.13)的一个特解。收敛域的存在可保证这一特解的稳定性, 对于适当的初值便可实现控制, 即使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^g(t)\| = 0 \quad (6.6.16)$$

可实现控制的初值范围:

$$B(f, x^g) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^g(t)\| = 0\} \quad (6.6.17)$$

称为系统(6.6.13)的控制目标 $x^g(t)$ 的**输送盆**。

输送控制的关键是根据目标动力学行为 $x^g(t)$ 构造外激励型控制 $F(\dot{x}^g, x^g)$, 将动力学轨道输送到目标轨道上。这种控制方案有三方面的局限性; 其一是不受控系统的特解不能成为控制目标, 此时因 $F(\dot{x}^g, x^g) = 0$ 而没有控制, 这意味着输送控制不能用于混沌的镇定问题; 其二是系统必须是耗散的, 这样才能有吸引性; 其三, 系统必须有可加性控制参数, 才有可能加外激励型控制。这种控制方案还基于收敛域和输送盆的存在, 对于一般的非线性系统, 两者的存在性并无证明, 只是对一维映射有些较严格的论证。输送控制的特点还可以概括为以下几方面: 首先, 输送控制实现的机制是共振, 当 $x^g(t)$ 为周期性轨道时, 由式(6.6.15)定义的外激励型控制也有相同的周期性, 共振便有同周期的响应; 其次, 由目标定义外激励性控制, 不仅能将动力学行为输送到某个给定目标行为上, 而且当系统有多个吸引子时也可实现在不同目标间的迁移; 第三, 输送控制必须有系统的数学模型, 模型既可以是已知的也可以是由数据构造的, 在此基础上才能定义所施加的控制; 最后, 输送控制是一次性施加的, 随后不需要任何反馈, 是一种开环控制。

6.6.4 系统理论在控制混沌中的应用

长期以来对系统理论能否应用于混沌系统的控制并不清楚, 20 世纪 90 年代以来才有一些尝试。较早的工作是应用确定性常规反馈控制和确定性自适应控制, 目前也有一些工作涉及最优控制、鲁棒控制和随机控制等。

常规反馈控制的原理较简单, 为使非线性系统(6.6.13)具有目标动力学行为 $x^g(t)$, 设计控制器 K 使受控系统为

$$\dot{x} = E(x) + K(x^s - x) \quad (6.6.18)$$

问题的关键便是针对所研究的具体系统设计控制器 K 。简单的自适应控制机制,例如使误差信号正比于目标与实际输出之差,在此基础上修改参数,用于系统

$$\dot{x} = E(x, p) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad p \in \mathbb{R}^m \quad (6.6.19)$$

有自适应控制算法:

$$\dot{x} = E(x, p), \quad \dot{p} = \epsilon G(e, \dot{e}), \quad e = x^s - x \quad (6.6.20)$$

其中 $G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是连续函数、 ϵ 为控制刚度,控制效果取决于 G 和 ϵ 的选择。自适应控制中的一些标准算法,如最小均方算法、量化状态最小均方算法和模型参考自适应算法等,也可应用于控制混沌。

系统理论在控制混沌中的应用具有以下几个特点:首先,系统理论为控制混沌问题提供了理论框架,可在其中统一描述两类驾驭混沌问题,即控制混沌和混沌同步化问题;其次,系统理论应用于控制混沌的局限尚不清楚,对于混沌的镇定和混沌的控制都适用,原则上似乎可以适当地设计控制器,以任意周期运动为目标控制任意混沌系统,例如,输送控制和镇定控制都不适用于保守系统,但有用随机自适应控制成功地控制保守系统混沌的例子;第三,非线性系统理论应用于控制混沌时,系统的模型参数不必是完全已知的,部分未知参数可利用自适应参数辨识技术从数据中得到,然后实施控制;第四,在利用自适应控制方法控制混沌时,被控系统与控制器构成闭环系统中可能产生新的动力学复杂性。事实上,有反馈系统的复杂动力学行为早已被了解并有大量研究工作,只是以往受控系统本身并非是混沌的。因此控制的效果取决于控制器的设计。最后,以目标与实际输出之差进行反馈是系统理论应用的基本特征。

习 题

6.1 选择适当初始条件,试应用常微分方程的数值方法计算非线性振动系统

$$\ddot{x} - 0.15\dot{x} - x + x^3 = 0.3 \cos t$$

的时间历程、相轨迹曲线和庞加莱映射,并说明混沌振动的初态敏感性、内禀随机性和非周期性。

6.2 在初始条件 $x_0 = a$ 下,试计算系统

$$\dot{x} = bx + c$$

的李雅普诺夫指数。将该结果推广到高维线性系统可得到何种结论?

6.3 在上题中,若 $b > 0$, 系统是否出现混沌运动,为什么?

6.4 在零初始条件下,基于常微分方程的数值解法计算例 6.1-4 中两种情形的李雅普诺夫指数和李雅普诺夫维数。

6.5 取一单位长度线段。去掉位于线段正中、长度为 $1/3$ 的小线段,再用与该小线段构成等边三角形的另外两边代替。在所得折线的 4 段长度为 $1/3$ 的线段上去掉位于每段线段正中、长度为 $1/9$ 的小线段,再用与该小线段构成等边三角形的另外两边代替。得到 4^i 个长度为 3^{-i} 的线段构成的折线,确定令 $i \rightarrow \infty$ 所得到的曲线的维数。

6.6 取一单位长度线段为边长的等边三角形。将该三角形四等分得到 4 个边长为 $1/2$ 的等边三角形,去掉中间一个,保留它的 3 条边。再将剩下的 3 个小等边三角形四等分,分别去掉中间的一个,保留它们的边。确定重复上述过程直至无穷所得几何形体的维数。

6.7 设点落入康托集合左、右区间的概率分别为 P_L 和 P_R , 试计算该康托集合的信息维数。

6.8 试证明式(6.3.19)定义的 q 阶广义维数 d_q 当 $q > 0$ 时随 q 的增大而减小。

6.9 试证明可积系统

$$\ddot{x} + x - x^3 = 0$$

的异宿轨道为

$$x_{\pm}(t) = \pm \tanh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right), \quad \dot{x}_{\pm}(t) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$$

再利用梅利尼科夫方法证明非线性振动系统

$$\ddot{x} + \varepsilon \delta \dot{x} + x - x^3 = \varepsilon f \cos \omega t \quad (\varepsilon, \delta, f > 0, \varepsilon \ll 1)$$

存在混沌的必要条件为

$$\frac{f}{\delta} > \frac{2}{3\pi\omega} \sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega\pi\right)$$

6.10 对于非线性振动系统

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon(a + f \cos \omega t) \quad (\varepsilon, a > 0, \varepsilon \ll 1)$$

试求当 $\varepsilon = 0$ 时相应可积系统的异宿轨道,进而导出系统的梅利尼科夫函数,并建立存在混沌的条件。

6.11 对于非线性系统

$$\dot{x} = 7y - f(x), \quad \dot{y} = x - y + z, \quad \dot{z} = -by$$

其中

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & (x \geq 1) \\ -x & (|x| < 1) \\ 2x + 3 & (x \leq -1) \end{cases}$$

试应用什尔尼科夫方法证明当 $6.5 \leq b \leq 10.5$ 时存在混沌。

6.12 设 M 为连续可逆哈密顿映射, D 为相空间中的有界区域, 试证明 D 中任意点的非零体积的邻域 U 中存在某点使得该点在映射 M 的有限次作用后返回邻域 U 。

6.13 若平面近可积哈密顿系统的哈密顿函数为 $H(x, y, t) = H_0(x, y) + \varepsilon H_1(x, y, t)$, 当 $\varepsilon = 0$ 时相应可积系统有同宿轨道 $(x_0(t), y_0(t))$, 证明该系统的梅利尼科夫函数为

$$M(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_0(x(t-\tau), y(t-\tau)), H_1(x(t-\tau), y(t-\tau), t)| dt$$

其中

$$|H_0, H_1| = \frac{\partial H_0}{\partial x} \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_0}{\partial y} \frac{\partial H_1}{\partial x}$$

6.14 若非线性振动系统的哈密顿函数为

$$H(x, y, t) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\varepsilon x^2 \cos \omega t \quad (\varepsilon \ll 1)$$

试建立该系统的动力学方程, 求出当 $\varepsilon = 0$ 时相应可积系统的同宿轨道, 导出梅利尼科夫函数。

附录

附录一 李雅普诺夫稳定性定理的证明

A.1.1 稳定性定理

定理：若能构造可微正定函数 $V(x)$ ，使得沿扰动方程(1.1.7)解曲线计算的全导数 \dot{V} 为半负定或等于零，则自治系统的未扰运动稳定。

证明：对于任意小的正数 ϵ ，作以零点为中心， ϵ 为半径的球面 S_ϵ 。设 l 为球面 S_ϵ 上 $V(x)$ 的最小值，由于正定函数 $V(x)$ 具有无穷小上界，必可找到正数 δ ，使得 $\|x(t)\| \leq \delta$ 内的任一点处均有 $V(x) < l$ 。选择 $x(t)$ 在 $t = t_0$ 时的初始值 x_0 ，使满足 $\|x_0\| = \|x(t_0)\| \leq \delta$ ，则 $V(x_0) < l$ 。计算 $V(x)$ 沿解曲线 $x(t)$ 的积分式：

$$V(x) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(x(t)) dt \quad (\text{A.1.1})$$

由 $V(x_0) < l$ ， $\dot{V}(x) \leq 0$ 推知

$$V(x) \leq V(x_0) < l \quad (\text{A.1.2})$$

因此在 $t \geq t_0$ 的任意时刻，均有 $\|x(t)\| < \epsilon$ 。根据稳定性定义，未扰运动稳定。

A.1.2 渐近稳定性定理

定理：若能构造可微正定函数 $V(x)$ ，使得沿扰动方程(1.1.7)解曲线计算的全导数 \dot{V} 为负定，则自治系统的未扰运动渐近稳定。

证明：由于稳定性条件已得到满足，对于任意小的正数 ϵ ，必存在正数 δ ，使 $x(t)$ 的初始值满足 $\|x(t_0)\| \leq \delta$ 的一切解曲线 $x(t)$ 保持在半径为 ϵ 的球面 S_ϵ 所围闭域中。需要补充证明的是，当 $t \rightarrow \infty$ 时是否 $\|x(t)\| \rightarrow 0$ 。

采用反证法，假设有正数 e 存在，使 $t \geq t_0$ 时有

$$V(x) > e \quad (\text{A.1.3})$$

由于正定函数 $V(x)$ 具有无穷小上界, 必可找到正数 β , 使得 $\|x(t)\| \leq \beta$ 内的任一点处均有 $V(x) < e$ 。因此若式(A.1.3)确实成立, 则 $x(t)$ 的模应满足

$$\beta \leq \|x(t)\| \leq e. \quad (\text{A.1.4})$$

作半径为 β 的球面 S_β , 则解曲线 $x(t)$ 必保持在 S_e 与 S_β 所围的环域之内。设负定函数 $\dot{V}(x)$ 在此闭域内有最大值 $-l$, 则 $V(x)$ 在此域内的估值为

$$V(x) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(x(t)) dt \leq V(x_0) - l(t - t_0) \quad (\text{A.1.5})$$

当 t 足够大时, $V(x)$ 为负值, 与正定性条件产生矛盾, 因此式(A.1.3)必不可能成立。即无论 e 如何小, 总会在某一时刻 $t = t_1$ 使 $V(x) < e$ 。由于 $V(x)$ 为时间的递减函数, 此后将永远小于 e 。取任意小正数 μ , 设 e 是半径为 μ 的球面 S_μ 上的最小值, 则在 $t = t_1$ 以后, $x(t)$ 的模必保持为 $\|x(t)\| < \mu$, 从而证明 $t \rightarrow \infty$ 时 $\|x(t)\| \rightarrow 0$ 。

A.1.3 不稳定性定理

定理: 若能构造可微正定、半正定或不定的有界函数 $V(x)$, 使得沿扰动方程(1.1.7)解曲线计算的全导数 \dot{V} 为正定, 则自治系统的未扰运动不稳定。

证明: 作以零点为中心, 任意正数 ε 为半径的球面 S_ε , 将函数 $V(x)$ 在 S_ε 围成的域内取正值的区域记作 D 。由于 $V(x)$ 有界, 在闭域 D 内有最大值 L , 即有

$$V(x) < L \quad (\text{A.1.6})$$

采用反证法, 假设对一切 $t \geq t_0$, 解曲线 $x(t)$ 均保持在 D 内。设函数 $V(t)$ 在 D 内有初始值 $V_0 = V(x_0)$, 由于 $\dot{V}(x)$ 在此区域内是正定的, 必存在正数 l , 使得 $V \geq V_0$ 时函数 $\dot{V} \geq l$ 。则 $V(x)$ 在此域内的估值为

$$V(x) = V_0 + \int_0^t \dot{V}(x(t)) dt \geq V_0 + l(t - t_0) \quad (\text{A.1.7})$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, $V(x(t)) \rightarrow \infty$, 与有界函数 $V(x)$ 的式(A.1.6)产生矛盾。因此解曲线 $x(t)$ 必越出 S_ε , 从而证明未扰运动不稳定。

附录二 闭轨迹稳定性定理的证明

讨论平面自治系统,其运动微分方程的一般形式为

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) \quad (\text{A.2.1})$$

设此系统存在封闭相轨迹 Γ , 与 Ox 轴交于点 A , Γ' 为 Γ 附近的另一条相轨迹, 与 Ox 轴的交点为 A' , 且有 $AA' = \lambda$ (图 A.2.1)。设相点沿 Γ' 的运动规律为

$$x = x(t, \lambda), \quad y = y(t, \lambda) \quad (\text{A.2.2})$$

当上式中的 λ 为零时, 就是相点沿闭轨迹 Γ 的运动规律。

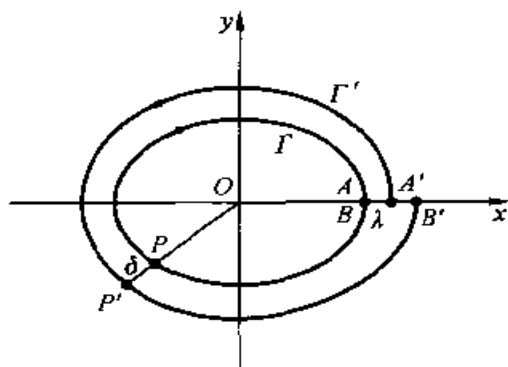


图 A.2.1 闭轨迹的稳定性

设在零时刻, 两个相点 P 和 P' 同时从点 A 和 A' 出发, 分别沿 Γ 和 Γ' 运动。在 t 时刻第一个相点到达 P , 连接并延长 OP 与 Γ' 交于 P' , 第二个相点到达 P' 的时间为 μt 。 μ 是 λ 的函数, $\mu = \mu(\lambda)$ 。显然有 $\mu(0) = 1$, 因此 $\mu(\lambda)$ 对 λ 的泰勒展开式为

$$\mu(\lambda) = 1 + a\lambda + \cdots \quad (\text{A.2.3})$$

令 $PP' = \delta$, 则 δ 是 t 和 λ 的函数 $\delta = \delta(t, \lambda)$, 且满足

$$\delta(t, 0) = 0, \quad \delta(0, \lambda) = \lambda \quad (\text{A.2.4})$$

沿 Γ 运动的相点经过一个周期 T 到达 Ox 轴与 A 重合的点 B 。沿 Γ' 运动的相点在 μT 时刻也到达 Ox 轴的点 B' 。 B' 与 A' 一般不重合, 显然有 $BB' = \delta(T, \lambda)$ 。令

$$\delta(T, \lambda) = \sigma\lambda \quad (\text{A.2.5})$$

其中的系数 σ 也是 λ 的函数, $\sigma = \sigma(\lambda)$ 。设 σ_0 为 $\lambda \rightarrow 0$ 时 σ 的极限, 则 $\sigma(\lambda)$ 对 λ 的泰勒展开式为

$$\sigma(\lambda) = \sigma_0 - \sigma_1\lambda + \cdots \quad (\text{A.2.6})$$

B 与 B' 的纵坐标差为零, 横坐标差为 $\delta(T, \lambda) = \sigma\lambda$ 。可写为

$$\left. \begin{aligned} x[\mu(\lambda)T, \lambda] - x(T, 0) &= \sigma(\lambda)\lambda \\ y[\mu(\lambda)T, \lambda] - y(T, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.7})$$

将上式的左边对 λ 展成泰勒级数, 并将式(A.2.3)代入, 得到

$$\left. \begin{aligned} aT \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{T,0} + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)_{T,0} &= \sigma_0 \\ aT \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{T,0} + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)_{T,0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.8})$$

消去 aT 后,得到

$$\sigma_0 = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{T,0}} \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)_{T,0} & \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{T,0} \\ \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)_{T,0} & \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{T,0} \end{vmatrix} \quad (\text{A.2.9})$$

根据 λ 的定义,应有 $x(0, \lambda) = \lambda, y(0, \lambda) = 0$ 。导出

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)_{0,\lambda} = 1, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)_{0,\lambda} = 0 \quad (\text{A.2.10})$$

由于相轨迹在 x 轴处的斜率为 ∞ , 因而有

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{0,\lambda} = 0, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{0,\lambda} \neq 0 \quad (\text{A.2.11})$$

引入以下朗斯基行列式 $W(t, \lambda)$:

$$W(t, \lambda) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \quad (\text{A.2.12})$$

利用式(A.2.10)和(A.2.11)计算 $W(0, \lambda)$, 得到

$$W(0, \lambda) = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{0,\lambda} \quad (\text{A.2.13})$$

根据函数 $y(t, 0)$ 的周期性导出

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{T,0} = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{0,0} = W(0, 0) \quad (\text{A.2.14})$$

将式(A.2.12)和(A.2.14)代入式(A.2.9), 得到

$$\sigma_0 = \frac{W(T, 0)}{W(0, 0)} \quad (\text{A.2.15})$$

计算 $W(t, \lambda)$ 对 t 的全导数, 运算过程中出现的 \dot{x} 和 \dot{y} 对 t 和 λ 的偏导数利用式(A.2.1)化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}, & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \lambda} &= \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial t} &= \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}, & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \lambda} &= \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.16})$$

整理后得到

$$\frac{dW}{dt} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) W \quad (\text{A.2.17})$$

积分得到

$$\ln \frac{W(t, \lambda)}{W(0, \lambda)} = \int_0^t \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)_{\Gamma} dt \quad (\text{A.2.18})$$

令上式中的 $t = T, \lambda = 0$, 并将以下积分定义为闭轨迹 Γ 的特征指数:

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)_{\Gamma} dt \quad (\text{A.2.19})$$

从式(A.2.15), (A.2.18)和(A.2.19)导出

$$\sigma_0 = e^{hT} \quad (\text{A.2.20})$$

则闭轨迹 Γ 的稳定性取决于 h 的符号:

$$\left. \begin{array}{l} h < 0: \quad \sigma_0 < 1 \quad \text{闭轨迹 } \Gamma \text{ 稳定} \\ h > 0: \quad \sigma_0 > 1 \quad \text{闭轨迹 } \Gamma \text{ 不稳定} \end{array} \right\} \quad (\text{A.2.21})$$

从而证明了闭轨迹稳定性定理: 若平面自治系统的闭轨迹 Γ 的特征指数 $h < 0$, 则闭轨迹 Γ 稳定; 若 $h > 0$, 则 Γ 不稳定。

附录三 小参数法的数学根据

A.3.1 庞加莱定理

对于弱非线性系统, 当其派生系统存在周期解且 ϵ 足够小时, 能否推断其基本系统也有相接近的周期解? 在一般情况下此论断不一定成立, 只要举耗散系统的例子就能说明。讨论耗散系统的自由振动:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\epsilon \dot{x} \quad (\text{A.3.1})$$

当 $\epsilon = 0$ 时, 此系统为保守系统的自由振动, 存在周期解。但若 $\epsilon \neq 0$, 不论 ϵ 如何小, 耗散系统都不存在周期解。因此有必要研究对派生系统的周期解进行摄动以寻求基本系统的周期解的数学根据。

讨论弱非线性系统, 其动力学微分方程为

$$\dot{x} = P(x, y, t, \epsilon), \quad \dot{y} = Q(x, y, t, \epsilon) \quad (\text{A.3.2})$$

其中 ϵ 是足够小的与 x, \dot{x}, t 无关的独立参数, 函数 P, Q 均为 ϵ 的解析函数。设此方程的解满足存在和唯一性定理和对参数的解析性定理, $\epsilon = 0$ 时, 系统(A.3.1)转化为派生系统:

$$\dot{x} = P(x, y, t, 0), \quad \dot{y} = Q(x, y, t, 0) \quad (\text{A.3.3})$$

设派生系统有周期 T 的周期解:

$$x = x_0(t), \quad y = y_0(t) \quad (\text{A.3.4})$$

设原系统(A.3.2)有与派生解接近的基本解:

$$x = x(t, \epsilon), \quad y = y(t, \epsilon) \quad (\text{A.3.5})$$

此基本解与派生解的不同初始值之差为 ϵ 的函数,记为:

$$\beta_1(\epsilon) = x(0, \epsilon) - x_0(0), \quad \beta_2(\epsilon) = y(0, \epsilon) - y_0(0) \quad (\text{A.3.6})$$

函数 $\beta_1(\epsilon)$ 和 $\beta_2(\epsilon)$ 应满足

$$\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0 \quad (\text{A.3.7})$$

则可将基本解写为 $\beta_1, \beta_2, \epsilon$ 和 t 的函数:

$$x = x(t, \beta_1, \beta_2, \epsilon), \quad y = y(t, \beta_1, \beta_2, \epsilon) \quad (\text{A.3.8})$$

其初始条件为

$$\left. \begin{aligned} x(0, \beta_1, \beta_2, \epsilon) &= x_0(0) + \beta_1(\epsilon) \\ y(0, \beta_1, \beta_2, \epsilon) &= y_0(0) + \beta_2(\epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.9})$$

引入以下函数:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= x(T, \beta_1, \beta_2, \epsilon) - x(0, \beta_1, \beta_2, \epsilon) \\ \psi_2 &= y(T, \beta_1, \beta_2, \epsilon) - y(0, \beta_1, \beta_2, \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.10})$$

则基本解也是周期为 T 的周期函数的充分必要条件为

$$\psi_1 = \psi_2 = 0 \quad (\text{A.3.11})$$

其中 T 为基本解的周期。若方程组(A.3.10)的雅可比行列式 J 在 $\beta_1 = \beta_2 = \epsilon = 0$ 时不为零,

$$J = \left(\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(\beta_1, \beta_2)} \right)_{\beta_1 = \beta_2 = \epsilon = 0} \neq 0 \quad (\text{A.3.12})$$

根据隐函数存在定理,方程组(A.3.9)在 $\beta_1 = \beta_2 = \epsilon = 0$ 附近存在单值隐函数:

$$\beta_1 = \beta_1(\epsilon), \quad \beta_2 = \beta_2(\epsilon) \quad (\text{A.3.13})$$

将上式代入式(A.3.9),以此为初始条件的基本解就是以 T 为周期的周期函数。根据解的唯一性,当 $\epsilon = 0$ 时,此基本解与派生解必完全符合。

上述分析证明了庞加莱定理:如果对于所研究的周期派生解,雅可比行列式 $J = \partial(\psi_1, \psi_2)/\partial(\beta_1, \beta_2)$ 在 $\beta_1 = \beta_2 = \epsilon = 0$ 时不为零,则当 ϵ 充分小

时,唯一地存在一个周期基本解,当 $\epsilon = 0$ 时变为派生解,且对 ϵ 是解析的。

A.3.2 远离共振的受迫振动

讨论由以下带小参数的动力学方程描述的单自由度非自治系统:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t) + \epsilon f(x, \dot{x}, t, \epsilon) \quad (\text{A.3.14})$$

其中 $F(t)$ 是周期为 T 的周期函数。此系统的派生系统为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t) \quad (\text{A.3.15})$$

派生系统的稳态周期解 $x_0(t)$ 可利用杜哈梅(J. M. C. Duhamel)积分写出

$$x = x_0(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau \quad (\text{A.3.16})$$

设基本解和派生解的初始值之差为

$$\left. \begin{aligned} x(0, \beta_1, \beta_2, \epsilon) - x_0(0) &= \beta_1(\epsilon) \\ \dot{x}(0, \beta_1, \beta_2, \epsilon) - \dot{x}_0(0) &= \beta_2(\epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.17})$$

将基本解展成 β_1, β_2 和 ϵ 的幂级数:

$$x(t, \beta_1, \beta_2, \epsilon) = x_0(t) + A(t)\beta_1 + B(t)\beta_2 + C(t)\epsilon + \cdots \quad (\text{A.3.18})$$

将上式代入方程(A.3.14),令 β_1, β_2 的同次幂的系数相等,得到除派生系统(A.3.15)以外的以下微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{A} + \omega_0^2 A &= 0 \\ \ddot{B} + \omega_0^2 B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.19})$$

$A(t), B(t)$ 的初始条件可从式(A.3.17), (A.3.18)导出

$$A(0) = 1, \quad \dot{A}(0) = 0, \quad B(0) = 0, \quad \dot{B}(0) = 1 \quad (\text{A.3.20})$$

解出方程(A.3.19)的满足初始条件(A.3.20)的解:

$$A(t) = \cos \omega_0 t, \quad B(t) = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (\text{A.3.21})$$

将式(A.3.18)代入式(A.3.10)定义的 ψ_1, ψ_2 函数,再代入周期性条件(A.3.11),得到

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= [A(T) - A(0)]\beta_1 + [B(T) - B(0)]\beta_2 = 0 \\ \psi_2 &= [\dot{A}(T) - \dot{A}(0)]\beta_1 + [\dot{B}(T) - \dot{B}(0)]\beta_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.22})$$

将式(A.3.20)和(A.3.21)代入上式,令 $T = 2\pi/\omega$, 计算其雅可比行列式,得到

$$J = \left(\frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(\beta_1, \beta_2)} \right)_{\beta_1=\beta_2=\epsilon=0} = \begin{vmatrix} (\cos \omega_0 T - 1)\beta_1 & (\omega_0^{-1} \sin \omega_0 T)\beta_1 \\ -(\omega_0 \sin \omega_0 T)\beta_2 & (\cos \omega_0 T - 1)\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\cos \frac{2\pi\omega_0}{\omega} - 1 \right)^2 + \left(\sin \frac{2\pi\omega_0}{\omega} \right)^2 \quad (\text{A.3.23})$$

在远离共振情形, $\omega_0 \neq n\omega$, 上式中的 J 必不为零。齐次方程组(A.3.23)有 β_1 和 β_2 的非零解。根据庞加莱定理, 可作出以下结论:

如果弱非线性系统的派生系统的固有频率 ω_0 不是激励频率 ω 的整数倍, 则当 ϵ 充分小时, 唯一地存在一个频率为 ω 的周期基本解, 当 $\epsilon=0$ 时变成派生解, 且对 ϵ 是解析的。

A.3.3 接近共振的受迫振动

设单自由度非自治系统的动力学方程(A.3.14)中, 激励力 $F(t)$ 的频率 ω 的 n 倍与派生系统的固有频率 ω_0 相接近, $n\omega \approx \omega_0$, 令

$$(n\omega)^2 - \omega_0^2 = \epsilon\sigma \quad (\text{A.3.24})$$

将激励力 $F(t)$ 展成 ω 的傅里叶级数, 设其中的第 n 次谐波的系数为 ϵ 的同阶小量, 写为

$$F(t) = \frac{F_0}{2} + \sum_{m=1(\neq n)}^{\infty} (F_m \cos m\omega t + G_m \sin m\omega t) + \epsilon (F'_n \cos n\omega t + G'_n \sin n\omega t) \quad (\text{A.3.25})$$

代入方程(A.3.14)的右边, 化为

$$\ddot{x} + (n\omega)^2 x = G(t) - \epsilon g(x, \dot{x}, t, \epsilon) \quad (\text{A.3.26})$$

其中

$$\left. \begin{aligned} G(t) &= \frac{F_0}{2} + \sum_{m=1(\neq n)}^{\infty} (F_m \cos m\omega t + G_m \sin m\omega t) \\ g(x, \dot{x}, t, \epsilon) &= f(x, \dot{x}, t, 0) - \sigma x + F'_n \cos n\omega t + G'_n \sin n\omega t \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.27})$$

令方程(A.3.26)中的 $\epsilon=0$, 写出其派生方程:

$$\ddot{x} + (n\omega)^2 x = G(t) \quad (\text{A.3.28})$$

此方程有以下特解:

$$x_0(t) = \frac{F_0}{2(n\omega)^2} - \sum_{m=1(\neq n)}^{\infty} \frac{F_m \cos m\omega t + G_m \sin m\omega t}{(n^2 - m^2)\omega^2} +$$

$$a \cos n\omega t + b \sin n\omega t \quad (\text{A.3.29})$$

设原方程(A.3.14)的基本解 $x(t)$ 和派生解 $x_0(t)$ 的初始值之差为 β_1, β_2 , 如式(A.3.17)所示。则可将基本解展成 β_1, β_2 和 ϵ 的幂级数:

$$\begin{aligned} x(t, \beta_1, \beta_2, \epsilon) = & x_0(t) + A(t)\beta_1 + B(t)\beta_2 + \\ & \epsilon [C(t) + D(t)\beta_1 + E(t)\beta_2] + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.3.30})$$

将非线性项 $g(x, \dot{x}, t)$ 也展成 β_1, β_2 和 ϵ 的幂级数:

$$\begin{aligned} g(x, \dot{x}, t, \epsilon) = & g(x_0, \dot{x}_0, t, 0) + \left(\frac{\partial g}{\partial x} A + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \dot{A} \right)_{x_0, \dot{x}_0, t, 0} \beta_1 + \\ & \left(\frac{\partial g}{\partial x} B + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \dot{B} \right)_{x_0, \dot{x}_0, t, 0} \beta_2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.3.31})$$

将式(A.3.30), (A.3.31)代入方程(A.3.14), 令 β_1, β_2 和 ϵ 的各次幂系数相等, 导出以下线性方程组:

$$\ddot{A} + (n\omega)^2 A = 0 \quad (\text{A.3.32a})$$

$$\ddot{B} + (n\omega)^2 B = 0 \quad (\text{A.3.32b})$$

$$\ddot{C} + (n\omega)^2 C = g(x, \dot{x}_0, t, 0) \quad (\text{A.3.32c})$$

$$\ddot{D} + (n\omega)^2 D = \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) A + \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) \dot{A} \right]_{x_0, \dot{x}_0, t, 0} \quad (\text{A.3.32d})$$

$$\ddot{E} + (n\omega)^2 E = \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) B + \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) \dot{B} \right]_{x_0, \dot{x}_0, t, 0} \quad (\text{A.3.32e})$$

各个方程的解的初始条件可从式(A.3.17)和(A.3.30)导出, 得到

$$\left. \begin{aligned} A(0) = 1, \quad \dot{A}(0) = 0, \quad B(0) = 0, \quad \dot{B}(0) = 1 \\ C(0) = \dot{C}(0) = D(0) = \dot{D}(0) = E(0) = \dot{E}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.33})$$

方程组(A.3.32)的满足初始条件(A.3.33)的解为

$$A(t) = \cos n\omega t \quad (\text{A.3.34a})$$

$$B(t) = \frac{1}{n\omega} \sin n\omega t \quad (\text{A.3.34b})$$

$$C(t) = \frac{1}{n\omega} \int_0^t g[x_0(\tau), \dot{x}_0(\tau), \tau, 0] \sin[n\omega(t - \tau)] d\tau \quad (\text{A.3.34c})$$

$$D(t) = \frac{1}{n\omega} \int_0^t \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x_0, \dot{x}_0, \tau, 0} \cos n\omega\tau - n\omega \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right)_{x_0, \dot{x}_0, \tau, 0} \sin n\omega\tau \right] \cdot \sin[n\omega(t-\tau)] d\tau \quad (\text{A.3.34d})$$

$$E(t) = \frac{1}{(n\omega)^2} \int_0^t \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x_0, \dot{x}_0, \tau, 0} \sin n\omega\tau + n\omega \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right)_{x_0, \dot{x}_0, \tau, 0} \cos n\omega\tau \right] \cdot \sin[n\omega(t-\tau)] d\tau \quad (\text{A.3.34e})$$

将式(A.3.30)代入式(A.3.10)定义的 ψ_1, ψ_2 函数, 得到

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \psi_{10} + \epsilon\psi_{11} + \cdots \\ \psi_2 &= \psi_{20} + \epsilon\psi_{21} + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.35})$$

以为 $T = 2\pi/n\omega$ 为周期的周期性条件 $\psi_1 = \psi_2 = 0$ 要求各次 ϵ 项的系数为零, 即

$$\left. \begin{aligned} \psi_{10} &= [A(T) - A(0)]\beta_1 + [B(T) - B(0)]\beta_2 = 0 \\ \psi_{20} &= [\dot{A}(T) - \dot{A}(0)]\beta_1 + [\dot{B}(T) - \dot{B}(0)]\beta_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.36})$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{11} &= [C(T) - C(0)] + [D(T) - D(0)]\beta_1 + [E(T) - E(0)]\beta_2 = 0 \\ \psi_{21} &= [\dot{C}(T) - \dot{C}(0)] + [\dot{D}(T) - \dot{D}(0)]\beta_1 + [\dot{E}(T) - \dot{E}(0)]\beta_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.37})$$

在式(A.3.37)中, 为保证函数 $\beta_1(\epsilon), \beta_2(\epsilon)$ 满足 $\epsilon = 0$ 的边界条件 $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$, 以下等式必须成立:

$$C(T) - C(0) = 0, \quad \dot{C}(T) - \dot{C}(0) = 0 \quad (\text{A.3.38})$$

齐次方程组(A.3.37)中 β_1 和 β_2 的非零解条件为

$$\left[\frac{\partial(\psi_{11}, \psi_{21})}{\partial(\beta_1, \beta_2)} \right]_{\beta_1 = \beta_2 = \epsilon = 0} = \begin{vmatrix} D(T) - D(0) & E(T) - E(0) \\ \dot{D}(T) - \dot{D}(0) & \dot{E}(T) - \dot{E}(0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{A.3.39})$$

为计算此雅可比行列式, 将非线性函数 $g(x_0, \dot{x}_0, t, 0)$ 展成周期为 T 的傅里叶级数:

$$g(x_0, \dot{x}_0, t, 0) = \frac{f_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (f_m \cos m\omega t + g_m \sin m\omega t) \quad (\text{A.3.40})$$

其中的系数 f_m, g_m 定义为

$$\left. \begin{aligned} f_m &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^T g[x_0(\tau), \dot{x}_0(\tau), \tau, 0] \cos m\omega\tau d\tau \\ g_m &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^T g[x_0(\tau), \dot{x}_0(\tau), \tau, 0] \sin m\omega\tau d\tau \end{aligned} \right\} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (\text{A.3.41})$$

将被积函数中的 $x_0(\tau)$ 和 $\dot{x}_0(\tau)$ 以式(A.3.29)代入后,可看出积分 f_m , g_m ($m=1, 2, \dots$) 为 a, b 的函数。直接验算可以证明以下等式:

$$\left. \begin{aligned} C(T) - C(0) &= -\frac{\pi}{n\omega^2} g_n(a, b) \\ \dot{C}(T) - \dot{C}(0) &= -\frac{\pi}{\omega} f_n(a, b) \\ D(T) - D(0) &= -\frac{\pi}{n\omega^2} \frac{\partial g_n}{\partial a} \\ \dot{D}(T) - \dot{D}(0) &= -\frac{\pi}{\omega} \frac{\partial f_n}{\partial a} \\ E(T) - E(0) &= -\frac{\pi}{n^2\omega^3} \frac{\partial g_n}{\partial b} \\ \dot{E}(T) - \dot{E}(0) &= -\frac{\pi}{n\omega^2} \frac{\partial f_n}{\partial b} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.42})$$

则式(A.3.38)可写为

$$g_n(a, b) = 0, \quad f_n(a, b) = 0 \quad (\text{A.3.43})$$

条件(A.3.39)转化为

$$\frac{\partial(g_n, f_n)}{\partial(a, b)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_n}{\partial a} & \frac{\partial g_n}{\partial b} \\ \frac{\partial f_n}{\partial a} & \frac{\partial f_n}{\partial b} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{A.3.44})$$

此条件即方程(A.3.43)中隐函数 a, b 的存在条件。从而得出以下结论:

如果弱非线性系统的派生系统的固有频率 ω_0 接近激励频率 ω 的整数倍 $n\omega$, 将派生解代入非线性项, 并按激励频率展开傅里叶级数, 从第 n 次谐波的系数为零的等式中能单值解出稳态响应振幅的参数 a, b , 则当 ϵ 充分小时, 唯一地存在一个频率为 $n\omega$ 的周期基本解, 当 $\epsilon=0$ 时变成派生解, 且对 ϵ 是解析的。

$n=1$ 时为主共振, n 为大于 1 的整数时为超谐波共振。以上结论也适用于 $n=1/k$, k 为大于 1 的整数时的特殊情形, 即亚谐波共振情形。^[1]

A.3.4 弱非线性系统的自由振动

讨论自治的非线性系统,其动力学方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, \varepsilon) \quad (\text{A.3.45})$$

此系统的派生系统为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{A.3.46})$$

存在周期为 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 的简谐变化的派生解:

$$x = x_0(t) = a \cos \omega_0 t \quad (\text{A.3.47})$$

设原系统(A.3.45)的基本解 $x = x(t, \varepsilon)$ 与派生解的初始值之差为 β , 而初始速度相同, 则基本解也可写为 $x = x(t, \beta, \varepsilon)$, 其初始条件为

$$\left. \begin{aligned} x(0, \beta, \varepsilon) &= x_0(0) + \beta = a + \beta \\ \dot{x}(0, \beta, \varepsilon) &= \dot{x}_0(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.48})$$

设基本解也是 t 的周期函数, 其周期 T 与派生解的周期 T_0 之差为 α , 即

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} + \alpha \quad (\text{A.3.49})$$

$\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $\beta = \beta(\varepsilon)$ 都是 ε 的函数, 为 ε 的同阶小量, 且满足边界条件:

$$\alpha(0) = \beta(0) = 0 \quad (\text{A.3.50})$$

将基本解 $x = x(t, \beta, \varepsilon)$ 展成 ε 和 β 的幂级数:

$$x(t, \beta, \varepsilon) = x_0(t) + A(t)\beta + \varepsilon[C(t) + D(t)\beta + E(t)\varepsilon + \cdots] + \cdots \quad (\text{A.3.51})$$

利用上式将非线性项 $f(x, \dot{x}, \varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0, x=x_0$ 附近展成泰勒级数, 得到

$$f(x, \dot{x}, \varepsilon) = f(x_0, \dot{x}_0, 0) + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, \dot{x}_0, 0} A + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right)_{x_0, \dot{x}_0, 0} \dot{A} \right] \beta + \cdots \quad (\text{A.3.52})$$

将式(A.3.51), (A.3.52)代入方程(A.3.45)的两边, 令 ε 和 β 的同次幂系数相等, 导出以下线性方程组:

$$\ddot{A} + \omega_0^2 A = 0 \quad (\text{A.3.53a})$$

$$\ddot{C} + \omega_0^2 C = f(x_0, \dot{x}_0, 0) \quad (\text{A.3.53b})$$

$$\ddot{D} + \omega_0^2 D = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x_0, \dot{x}_0, t, 0} A + \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right)_{x_0, \dot{x}_0, t, 0} \dot{A} \quad (\text{A.3.53c})$$

$A(t), C(t), D(t)$ 的初始条件可从式(A.3.48)和(A.3.51)导出:

$$A(0) = 1, \quad \dot{A}(0) = 0, \quad C(0) = \dot{C}(0) = D(0) = \dot{D}(0) = 0 \quad (\text{A.3.54})$$

各方程满足此初始条件的解为

$$A(t) = \cos \omega_0 t \quad (\text{A.3.55a})$$

$$C(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t f[x_0(\tau), \dot{x}_0(\tau), 0] \sin[\omega_0(t - \tau)] d\tau \quad (\text{A.3.55b})$$

$$D(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, \dot{x}_0, 0} \cos \omega_0 \tau - \omega_0 \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right)_{x_0, \dot{x}_0, 0} \sin \omega_0 \tau \right] \sin[\omega_0(t - \tau)] d\tau \quad (\text{A.3.55c})$$

利用式(A.3.48)写出基本解的周期性条件:

$$\left. \begin{aligned} x(T_0 + \alpha, \beta, \epsilon) - x(0, \beta, \epsilon) &= x(T_0 + \alpha, \beta, \epsilon) - \alpha - \beta = 0 \\ \dot{x}(T_0 + \alpha, \beta, \epsilon) - \dot{x}(0, \beta, \epsilon) &= \dot{x}(T_0 + \alpha, \beta, \epsilon) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.56})$$

将此条件在 $\alpha=0$ 附近展成 α 的泰勒级数, 得到

$$\left. \begin{aligned} x(T_0, \beta, \epsilon) + \dot{x}(T_0, \beta, \epsilon)\alpha + \frac{1}{2}\ddot{x}(T_0, \beta, \epsilon)\alpha^2 + \cdots - \alpha - \beta &= 0 \\ \dot{x}(T_0, \beta, \epsilon) + \ddot{x}(T_0, \beta, \epsilon)\alpha + \cdots &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.57})$$

利用式(A.3.45)消去上式中的 \ddot{x} , 化为

$$\left. \begin{aligned} x(T_0, \beta, \epsilon) + \dot{x}(T_0, \beta, \epsilon)\alpha - \frac{1}{2}\omega_0^2 x(T_0, \beta, \epsilon)\alpha^2 + \cdots - \alpha - \beta &= 0 \\ \dot{x}(T_0, \beta, \epsilon) - \omega_0^2 x(T_0, \beta, \epsilon)\alpha + \cdots &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.58})$$

将式(A.3.51)代入式(A.3.58), 第一式中保留 ϵ, α, β 的二阶小量, 第二式中保留一阶小量, 得到

$$\epsilon[C(T_0) + D(T_0)\beta + E(T_0)\epsilon + \dot{C}(T_0)\alpha] - \frac{1}{2}\omega_0^2 a\alpha^2 = 0 \quad (\text{A.3.59a})$$

$$\epsilon\dot{C}(T_0) - \omega_0^2 a\alpha = 0 \quad (\text{A.3.59b})$$

从式(A.3.59b)解出 α 后代入式(A.3.59a), 导出

$$C(T_0) + D(T_0)\beta + \epsilon \left[E(T_0) + \frac{\epsilon\dot{C}^2(T)}{2\omega_0^2 a} \right] = 0 \quad (\text{A.3.60})$$

为保证 $\epsilon=0$ 时 $\beta(0)=0$, 要求以下条件得到满足:

$$C(T_0) = 0, \quad D(T_0) \neq 0 \quad (\text{A.3.61})$$

将派生解 $x_0(t)$ 代入原方程(A.3.45)的非线性项 $f(x, \dot{x}, \epsilon)$ 后,展成周期为 T_0 的傅里叶级数:

$$f(x_0, \dot{x}_0, t, 0) = \frac{f_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (f_m \cos m\omega_0 t + g_m \sin m\omega_0 t) \quad (\text{A.3.62})$$

其中与 $m=1$ 对应的系数 g_1 为

$$g_1(a) = \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{T_0} f(a \cos \omega_0 \tau, -\omega_0 a \sin \omega_0 \tau, 0) \sin \omega_0 \tau d\tau \quad (\text{A.3.63})$$

将式(A.3.55b)与上式比较,可看出

$$C(0) = -\frac{\pi}{\omega_0^2} g_1(a) \quad (\text{A.3.64})$$

比较式(A.3.55b)和(A.3.55c)可看出: $D = \partial C / \partial a$, 则条件式(A.3.61)可化为

$$g_1(a) = 0, \quad \frac{\partial g_1(a)}{\partial a} \neq 0 \quad (\text{A.3.65})$$

此即 $f(x_0, \dot{x}_0, \epsilon)$ 的傅里叶展开式中,一次谐波系数 $g_1(a)$ 为零的等式中隐函数 a 的存在条件。从而得出以下结论:

如果弱非线性自治系统的派生系统的固有频率为 ω_0 , 将派生解代入非线性项,并按 ω_0 频率展开傅里叶级数,从一次谐波系数为零的等式中能单值解出自由振动振幅 a , 则当 ϵ 充分小时,唯一地存在一个频率为 ω 的周期基本解,当 $\epsilon=0$ 时变成派生解,且对 ϵ 是解析的。

附录四 平面霍普夫分岔定理的证明

A.4.1 霍普夫分岔定理证明的思路

在本附录中将应用庞加莱-伯克霍夫范式证明平面霍普夫分岔定理。这一证明过程包括三个主要步骤:导出一次近似方程具有共轭本征值的非线性系统的3阶PB范式;分析3阶PB范式定义的截断系统的分岔特性;说明在分岔值邻域原系统与截断系统具有相同的分岔特性。

本附录不仅证明了霍普夫分岔定理,也说明了PB范式应用于分岔问题研究的过程,包括带参数系统PB范式的推导,截断系统的分岔特性分析及原系统与截断系统关系的讨论。特别需要强调,由于PB范式截

断并不必然反映原系统的全部动力学行为,最后一个步骤是必要的。

需要说明,霍普夫分岔定理有不只一种证明方法。其中一种便于推广到无穷维系统的方法是将满足霍普夫分岔定理条件的动态分岔问题转化为周期函数空间中抽象微分方程的静态分岔问题,然后利用李雅普诺夫-施密特约化,可参阅文献[31]第341~358页。在应用PB范式的证明中,也可以直接导出系统PB范式而不先转化为复数的形式,可参阅文献[68]第262~268页。

A.4.2 霍普夫分岔系统的PB范式

为运算的方便将式(5.6.2)改写为复数形式,引入变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \text{ 即 } \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{A.4.1})$$

将式(A.4.1)代入式(5.6.2),得到

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + F(z, \bar{z}, \mu) \quad (\text{A.4.2})$$

$$\dot{\bar{z}} = \bar{\lambda}(\mu)\bar{z} + F(z, \bar{z}, \mu) \quad (\text{A.4.3})$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \lambda(\mu) &= \alpha(\mu) + i\beta(\mu) \\ F(z, \bar{z}, \mu) &= f(x(z, \bar{z}), y(z, \bar{z}), \mu) - ig(x(z, \bar{z}), y(z, \bar{z}), \mu) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4.4})$$

式(A.4.3)仅为式(A.4.2)的复共轭,实际上仅需要研究式(A.4.2)。将式(A.4.2)展成幂级数,得到

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + F_2(z, \bar{z}, \mu) + F_3(z, \bar{z}, \mu) + \cdots + F_{k-1}(z, \bar{z}, \mu) + O(k) \quad (\text{A.4.5})$$

其中 $F_j (j=2, 3, \cdots, k-1)$ 为 z 和 \bar{z} 的 j 次多项式, $O(k)$ 为与 z 和 \bar{z} 的 k 次多项式同阶的项,各多项式系数均与 μ 有关。

为导出PB范式,引入变换

$$z = w + P_k(w, \bar{w}, \mu) \quad (\text{A.4.6})$$

根据式(5.4.8),式(5.4.6)定义的算子 L_A 可逆时,其零空间为0维,PB范式中的非线性项可以消去。对于 w 和 \bar{w} 的齐次多项式所成空间的 $m+n$ 次基函数 $w^m \bar{w}^n$,在算子 L_A 的作用下

$$L_A(w^m \bar{w}^n) = \lambda(\mu)w \frac{\partial}{\partial w}(w^m \bar{w}^n) + \bar{\lambda}(\mu)\bar{w} \frac{\partial}{\partial \bar{w}}(w^m \bar{w}^n) -$$

$$\begin{aligned} & \lambda(\mu)(w^m \bar{w}^n) \\ &= (m\lambda(\mu) + n\bar{\lambda}(\mu) - \lambda(\mu))(w^m \bar{w}^n) \end{aligned} \quad (\text{A.4.7})$$

当 $\mu=0$ 时, 算子 L_A 有零空间的条件是

$$m\lambda(\mu) + n\bar{\lambda}(\mu) - \lambda(\mu) = 0 \quad (\text{A.4.8})$$

由式(5.6.4)和(A.4.4), 得到

$$m - n = 1 \quad (\text{A.4.9})$$

考虑 $m+n < 5$ 的情形, 仅有 $m=2$ 和 $n=1$ 满足上式。

根据以上分析, 在 μ 充分小时, 式(A.4.6)具有

$$\dot{w} = \lambda(\mu)w + pw^2\bar{w} + O(5) \quad (\text{A.4.10})$$

的形式。改写为实数形式, 令

$$w = u + iv, \quad p = a + ib \quad (\text{A.4.11})$$

在 μ 充分小时由式(A.4.4)有

$$\lambda(\mu) = (\alpha(0) + \alpha'(0)\mu) + i(\beta(0) + \beta'(0)\mu) \quad (\text{A.4.12})$$

将式(A.4.11)和(A.4.12)代入式(A.4.10)并注意到式(5.6.6)和(5.6.7), 即得到 PB 范式的实数形式

$$\begin{cases} \dot{u} = c\mu u - (e\mu + \omega)v + (au - bv)(u^2 - v^2) + O(5) \\ \dot{v} = (e\mu + \omega)u + c\mu v + (bu + av)(u^2 + v^2) + O(5) \end{cases} \quad (\text{A.4.13})$$

A.4.3 三阶 PB 范式系统的分岔特性

引入极坐标变换

$$u = \rho \cos \varphi, \quad v = \rho \sin \varphi \quad (\text{A.4.14})$$

将式(A.4.13)写为

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= c\mu\rho + a\rho^3 + O(\rho^5), & \dot{\varphi} &= \omega + e\mu + b\rho^2 + O(\rho^4) \end{aligned} \quad (\text{A.4.15})$$

略去 4 次及更高次的项, 得到三阶 PB 范式系统

$$\dot{\rho} = c\mu\rho + a\rho^3, \quad \dot{\varphi} = \omega + e\mu + b\rho^2 \quad (\text{A.4.16})$$

系统的极限环由方程

$$c\mu\rho + a\rho^3 = 0 \quad (\text{A.4.17})$$

的非零解确定。当 $c\mu$ 和 a 异号时, 式(A.4.17)有解

$$\rho_0 = 0, \quad \rho_c = \sqrt{-\frac{c\mu}{a}} \quad (\text{A.4.18})$$

式(A.4.16)在 $\rho=0$ 和 $\rho=\rho_1$ 的线性化系统分别为

$$\dot{\rho} = c\mu\rho, \quad \dot{\varphi} = \omega + e\mu \quad (\text{A.4.19})$$

$$\dot{\rho} = -2c\mu\rho, \quad \dot{\varphi} = \omega + e\mu \quad (\text{A.4.20})$$

故当 $c\mu < 0$ 时, 平衡点 $\rho = 0$ 渐近稳定, 极限环 $\rho = \rho_c$ 不稳定; 当 $c\mu > 0$ 时, 平衡点 $\rho = 0$ 不稳定, 极限环 $\rho = \rho_c$ 渐近稳定。

对于具体问题, c 由式(5.6.7)给出, 而尚未推导 a 明确的表达式。以下证明式(5.6.8)。为此仅需要导出 $\mu = 0$ 时 PB 范式, 此时式(A.4.2)可改写为

$$\dot{z} = i\omega z + h(z, \bar{z}) \quad (\text{A.4.21})$$

其中

$$h(z, \bar{z}) = F(z, \bar{z}, 0) \quad (\text{A.4.22})$$

而其 PB 范式为

$$\dot{w} = i\omega w + pw^2\bar{w} + O(5) \quad (\text{A.4.23})$$

引入变换

$$z = w + \phi(w, \bar{w}) \quad (\text{A.4.24})$$

将式(A.4.24)代入式(A.4.21), 得到

$$\dot{w} + \frac{\partial \phi}{\partial w} \dot{w} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{w}} \dot{\bar{w}} = i\omega(w + \phi) + h(w + \phi, \bar{w} + \bar{\phi}) \quad (\text{A.4.25})$$

注意到式(A.4.24)中 ϕ 和式(A.4.21)中 h 均为 2 次及更高次量, 则有

$$\begin{aligned} \phi(w, \bar{w}) = & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial w^2} w^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial w \partial \bar{w}} w \bar{w} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{w}^2} \bar{w}^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial w^3} w^3 + \\ & \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial w^2 \partial \bar{w}} w^2 \bar{w} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial w \partial \bar{w}^2} w \bar{w}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \bar{w}^3} \bar{w}^3 + O(3) \end{aligned} \quad (\text{A.4.26})$$

$$\begin{aligned} h(w + \phi, \bar{w} + \bar{\phi}) = & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial w^2} w^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial w \partial \bar{w}} w \bar{w} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{w}^2} \bar{w}^2 + \\ & \frac{1}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial w^2 \partial \bar{w}} w^2 \bar{w} + O(3) \end{aligned} \quad (\text{A.4.27})$$

将式(A.4.26), (A.4.27)及式(A.4.28)与其共轭代入式(A.4.25), 比较 2 次项系数, 得到

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial w^2} = -\frac{i}{\omega} \frac{\partial^2 h}{\partial w^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial w \partial \bar{w}} = \frac{i}{\omega} \frac{\partial^2 h}{\partial w \partial \bar{w}}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{w}^2} = \frac{i}{3\omega} \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{w}^2} \quad (\text{A.4.28})$$

比较 $w^2\bar{w}$ 项系数,得到

$$\begin{aligned} p - \frac{\partial^2 h}{\partial w^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial w \partial \bar{w}} - \frac{\partial^2 h}{\partial w \partial \bar{w}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial w \partial \bar{w}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{w}^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{w}^2} \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial w^2 \partial \bar{w}} \end{aligned} \quad (\text{A.4.29})$$

将式(A.4.28)代入式(A.4.29),得到

$$p = \frac{i}{6\omega} \left(3 \frac{\partial^2 h}{\partial w^2} \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial w \partial \bar{w}} - 6 \frac{\partial^2 h}{\partial w \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial w \partial \bar{w}} - \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{w}^2} \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{w}^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial w^2 \partial \bar{w}} \quad (\text{A.4.30})$$

注意到上式括号中后两项均为实数,根据式(A.4.11),

$$\begin{aligned} a = \operatorname{Re} p \\ = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial w^2 \partial \bar{w}} \right) - \frac{1}{\omega} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial w^2} \right) \operatorname{Im} \left(\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial w \partial \bar{w}} \right) + \operatorname{Im} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial w^2} \right) \operatorname{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial w \partial \bar{w}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.4.31})$$

根据式(A.4.22), (A.4.5), (A.4.1)和(A.4.24)按复合函数求导法,依次得到

$$\frac{\partial h}{\partial w} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] \quad (\text{A.4.32})$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial w^2} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right) + i \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \right] \quad (\text{A.4.33})$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial w \partial \bar{w}} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + i \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) \right] \quad (\text{A.4.34})$$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial w^2 \partial \bar{w}} \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \right) \quad (\text{A.4.35})$$

将式(A.4.33), (A.4.34)和(A.4.35)代入式(A.4.31)即导出式(5.6.8)。

以上分析可得到三阶PB范式系统(A.4.16)的分岔特性:(1)当 $c > 0$ 和 $a > 0$ 时,原点对 $\mu > 0$ 不稳定,对 $\mu < 0$ 渐近稳定;当 $\mu < 0$ 时存在不稳定极限环。(2)当 $c > 0$ 和 $a < 0$ 时,原点对 $\mu < 0$ 渐近稳定,对 $\mu > 0$ 不稳定;当 $\mu > 0$ 时存在渐近稳定极限环。(3)当 $c < 0$ 和 $a > 0$ 时,原点对 $\mu > 0$ 渐近稳定,对 $\mu < 0$ 不稳定;当 $\mu < 0$ 时存在不稳定极限环。(4)当 $c < 0$ 和 $a < 0$ 时,原点对 $\mu < 0$ 渐近稳定,对 $\mu > 0$ 不稳定;当 $\mu > 0$ 时存

在渐近稳定极限环。

A.4.4 原系统的分岔特性

前面的分析明确了三阶 PB 范式系统(A.4.13)即(5.6.4)的分岔特性。现讨论未经截断的系统(A.4.13)的分岔特性。由于上述四种情形分析的过程大体相似,故仅讨论超临界霍普夫分岔的情形(2)。

定义环形域

$$D = \{(u, v) \mid r_1^2 \leq u^2 + v^2 \leq r_2^2\} \quad (\text{A.4.36})$$

其中实数 r_1 和 r_2 满足

$$0 < r_1 < \sqrt{-\frac{c\mu}{a}} < r_2 \quad (\text{A.4.37})$$

将式(A.4.14)定义的向量场在环形边界 $u^2 + v^2 = r_2^2$ 上任意点处与沿径向的法线 n 点积,得到

$$\begin{aligned} Pu + Qv &= [c\mu u - (e\mu + \omega)v + (au - bv)(u^2 + v^2) + O(5)]u + \\ &\quad [(e\mu + \omega)u + c\mu v + (bu + av)(u^2 + v^2) + O(5)]v \\ &= (c\mu + a(u^2 + v^2))(u^2 + v^2) + O(6) \\ &= (c\mu + ar_2^2)r_2^2 + O(6) \end{aligned} \quad (\text{A.4.38})$$

当 μ 充分小时,可选择 r_2 充分小,在上式中略去高阶量 $O(6)$ 不影响其符号,根据式(A.4.38), $Pu + Qv < 0$, 即向量朝原点方向穿过圆周,故在边界上相轨迹由外向内进入 D 。同理可证明在边界 $u^2 + v^2 = r_1^2$ 上,相轨迹由外向内进入 D 。根据庞加莱-本迪克生定理,区域 D 内存在稳定极限环。因此原系统(A.4.15)与截断系统(A.4.16)有相同的分岔特性。事实上,还可以证明,系统(A.4.15)与系统(A.4.16)拓扑轨道等价。

附录五 混沌的拓扑描述

A.5.1 符号动力学

符号动力学是形式上最简单的一种系统,是对实际系统的一种高度概括和抽象。应用符号序列研究系统动力学行为起源于20世纪20年代伯克霍夫和莫泽的工作。随后,鲍文(R. Bowen)、茹厄勒、西奈(Ya. G. Sinai)等在微分动态系统理论和遍历性理论中发展了符号动力学。1973

年米特罗波利斯(N. Metropolis)等创立实用符号动力学。郝柏林等将实用符号动力学用于混沌研究。20世纪80年代以来符号动力学成为系统动力学行为研究尤其是混沌研究的重要方法。这里仅为从拓扑角度描述混沌,叙述符号动力学的若干基本概念和结果。关于符号动力学的系统论述可参阅文献[79,115],关于实用符号动力学及其在混沌研究中的应用,可参阅文献[44,76]。

多于1个的有限数目的元素集合

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\} \quad (\text{A.5.1})$$

称为**字母表**。字母表 A 中的元素称为符号。将 A 中元素任意地排成双向无限的序列

$$S = (\dots, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, s_2, \dots) \quad (\text{A.5.2})$$

称为**符号序列**,其中 $s_i \in A$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$),记号“;”加在零位元素的左方。将符号序列全体的集合记作 Σ_A 。

对于符号集合 Σ_A 中任意两个元素 $S = (\dots, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, s_2, \dots)$ 和 $T = (\dots, t_{-2}, t_{-1}; t_0, t_1, t_2, \dots)$,定义距离

$$d(S, T) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^{|i|}} \quad (\text{A.5.3})$$

其中

$$\delta_i = \begin{cases} 0 & s_i = t_i \\ 1 & s_i \neq t_i \end{cases} \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (\text{A.5.4})$$

可以验证,集合 Σ_A 和距离 d 构成度量空间 (Σ_A, d) ,称为**符号空间**,也简记为 Σ_A 。容易证明,当 $s_i = t_i$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$)时, $d(S, T) \leq 1/2^{n-1}$;而当 $d(S, T) < 1/2^{n-1}$ 时,对于 $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ 有 $s_i = t_i$ 。

在 Σ_A 上定义映射 σ ,使得对任意 $S \in \Sigma_A$ 有

$$\sigma(S) = \sigma((\dots, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, s_2, \dots)) = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0; s_1, s_2, \dots) \quad (\text{A.5.5})$$

即 $\sigma(S)$ 的第 i 个符号为

$$(\sigma(S))_i = s_{i+1} \quad (\text{A.5.6})$$

映射 σ 将符号序列 S 中每个位置上的符号向左移一位。映射 σ 有逆映射 σ^{-1} 存在,且 σ^{-1} 是将符号序列 S 中每个位置上的符号向右移一位。在距离 d 意义下,可以证明映射 σ 和 σ^{-1} 均为连续。因此, σ 是 Σ_A 上的一个同胚,称为**移位自同构**。

符号空间 Σ_A 和移位自同构 σ 构成的系统 (Σ_A, σ) 称为符号动力学。移位自同构 σ 具有若干特殊的动力学性质,列举如下。

性质 1: 移位自同构 σ 具有周期为任意自然数的周期点,即存在可数无穷多个周期点。

事实上,对于任意自然数 n ,仅考虑 A 有两个符号 0 和 1 的情形,此时 Σ_A 记为 Σ_2 。以 n 个符号构成的字节 $\overbrace{(0,0,\cdots,0,1)}^{n\uparrow}$ 循环生成符号空间 Σ_2 的元素 S_n ,则 $\sigma^n(S_n) = S_n$ 。因此该元素即为映射 σ 的 n 周期点。

性质 2: 移位自同构 σ 的周期点在符号空间 Σ_A 中为稠密,即在 Σ_A 中任意元素的任意小邻域内都存在 σ 的周期点。

事实上,对于任意 $S = (\cdots, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, s_2, \cdots) \in \Sigma_A$ 和任意正数 ϵ ,设 m 是满足 $m > -\log_2 \epsilon + 1$ 的正整数,则由 S 的中间 $2m+1$ 个符号构成字节 $(s_{-m}, \cdots, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, s_2, \cdots, s_m)$ 循环得到的 Σ_A 中元素 S_{2m+1} 是 $2m+1$ 周期点,且根据距离 d 的性质满足 $d(S, S_{2m+1}) \leq 1/2^{-1} < \epsilon$,即 S_{2m+1} 在 S 的 ϵ 邻域内。

性质 3: 移位自同构 σ 有稠密轨道,即存在 $S_0 \in \Sigma_A$,使得符号空间 Σ_A 中的集合 $\{S | S = \sigma^i(S_0), i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 在 Σ_A 中是稠密的。

事实上,当 A 仅由两个符号 0 和 1 构成时,取

$$S_0 = (\cdots, s_{-2}, s_{-1}; s_0, \overbrace{0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \cdots}^{\text{一切两个符号组合}}, \overbrace{0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \cdots, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots}^{\text{一切三个符号组合}}) \quad (\text{A.5.7})$$

对于任意 $S \in \Sigma_2$ 和 $\epsilon > 0$,由性质 2 得知,存在周期点 S_n 使得 $d(S, S_n) < \epsilon/2$ 。由 S_0 的构造得知, S_0 的足够长的某一节符号与周期点 S_n 的相应节的符号完全相同, σ 作用下移位若干次后可将该节移至符号序列的中间,即存在 i 使得 $d(\sigma^i(S_0), S_n) < \epsilon/2$ 。因此有 $d(\sigma^i(S_0), S) < \epsilon$ 。

移位自同构最引人注目的性质是具有初态敏感性。根据德凡尼(R. Devaney)的定义,映射 $f: I \rightarrow J$ 具有初态敏感性是指:存在 $\eta > 0$,对任意 $x \in I$ 和 x 的任意邻域 N ,存在 $y \in N$ 和 $n \geq 0$,使得 $d(f^n(x), f^n(y)) > \eta$ 。

事实上,取 $\eta = 0.5$ 。对于任意 $S \in \Sigma_A$ 和 S 的 ϵ 小邻域 N ,存在 $i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm m$ 时有 $s_i = t_i$ 且 $s_{m+1} \neq t_{m+1}$ 而其它元素为任意的 $T \in$

Σ_A 。由式(A.5.4), $\delta_{m+1} = 1$ 。根据距离 d 的性质, 当 $m > -\log_2 \epsilon$ 时, $d(S, T) < \epsilon$, 即 $T \in N$ 。取 $n = m + 1$, 根据移位映射的定义(A.5.5),

$$\left. \begin{aligned} \sigma^n(S) &= \sigma((\cdots, s_{m-1}, s_m; s_{m+1}, s_{m+2}, s_{m+3}, \cdots)) \\ \sigma^n(T) &= \sigma((\cdots, t_{m-1}, t_m; t_{m+1}, t_{m+2}, t_{m+3}, \cdots)) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.5.8})$$

将式(A.5.8)代入距离 d 的定义(A.5.3)和(A.5.4), 得到

$$d(\sigma^n(S), \sigma^n(T)) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_{i+m+1}}{2^{|i|}} = 1 + \sum_{i \neq 0} \frac{\delta_{i+m+1}}{2^{|i|}} \geq 1 > \eta \quad (\text{A.5.9})$$

符号空间上移位自同构反映了混沌的主要特性, 具有初态敏感性和稠密的可数无穷多个周期点, 可作为描述混沌的基本数学模型。

自1975年李天岩(T. Y. Li)和约克首次给出混沌的数学定义以来, 数学工作者一直探索严格而包括对象又足够广泛的混沌定义。一般认为混沌映射应满足三个条件: (1) 周期点是稠密的; (2) 有稠密轨道; (3) 具有对初始条件的敏感依赖性。条件(1)表明混沌映射不同于完全的随机运动, 含有规律性的成分。条件(2)表明混沌映射具有不可分解性, 不能被分解成两个在映射作用下彼此无关的子系统。条件(3)表明混沌映射具有不可预测性。1992年有人证明了一个惊人的结果, 上述条件(3)仅是条件(1)和(2)的自然推论。1994年又有人对于定义域为实数的映射证明了条件(1)和(3)都仅是条件(2)的推论。但无论怎样定义混沌, 移位自同构都是典型的呈现混沌性态的映射。

A.5.2 斯梅尔马蹄映射

非线性振动中涉及的系统往往不能直接应用符号动力学进行讨论, 但可通过拓扑共轭建立两系统之间的动力学等特性。两个系统 (X_i, f_i) ($i = 1, 2$), 若存在同胚映射 $h: X_1 \rightarrow X_2$, 使得

$$h \circ f_1 = f_2 \circ h \quad (\text{A.5.10})$$

其中“ \circ ”表示函数的复合关系。则称两个系统 (X_1, f_1) 和 (X_2, f_2) 为拓扑共轭。式(A.5.10)也可以写为

$$f_2 = h \circ f_1 \circ h^{-1} \quad (\text{A.5.11})$$

可以证明, 两个拓扑共轭的系统具有完全等价的动力学行为, 也即是 §5.1 所称的拓扑轨道等价。前面已经说明符号动力学 (Σ_A, σ) 具有混沌性态, 因此与 (Σ_A, σ) 拓扑共轭的系统也将呈现混沌性态。这样就可以将

所讨论系统混沌性态的问题转化为与 (Σ_A, σ) 拓扑共轭关系的问题。与符号动力学 (Σ_A, σ) 拓扑共轭的一个简单实例为斯梅尔马蹄变换。也就是将正方形竖直方向伸长、水平方向压缩后弯成马蹄形再放回原正方形中的映射。

考虑平面上的正方形 S 。将正方形在竖直方向上以拉伸比 $\mu > 2$ 拉长, 在水平方向上以压缩比 $\nu < 1/2$ 压缩, 形成一竖直窄长条, 然后弯成马蹄形, 放回原来的正方形。如图 A.5.1 所示。这样构造一个映射 $f: S \rightarrow R^2$, 由斯梅尔首先定义, 称为斯梅尔马蹄映射, 简称马蹄映射或斯梅尔马蹄。马蹄映射 f 及其逆映射 f^{-1} 作用的过程如图 A.5.1 所示。以下先构造马蹄映射的不变集。

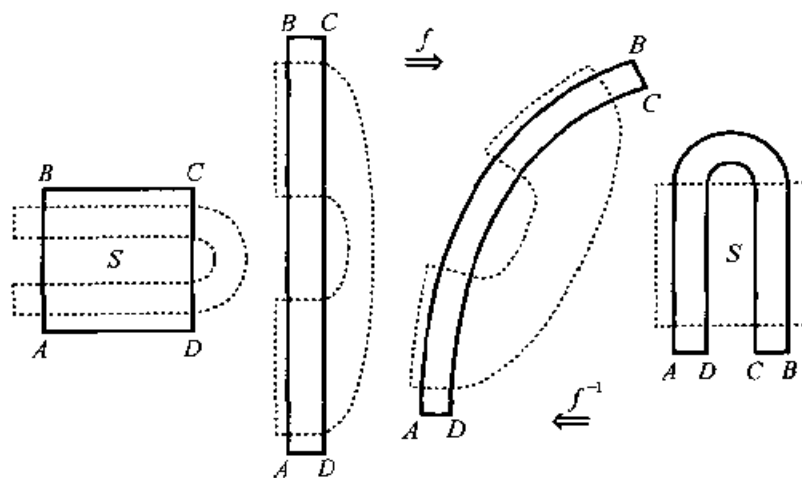


图 A.5.1 斯梅尔马蹄映射及其逆映射

正方形 S 及其映射后的像 $f(S)$ 共同部分 $V = S \cap f(S)$ 为不相交的两个竖条 V_0 和 V_1 , 即 $V = V_0 \cup V_1$, 如图 A.5.2a 所示, 每个竖条的宽度小于 $1/2$ 。 V 的逆像 $H = f^{-1}(V)$ 是由两个不相交的横条 $H_0 = f^{-1}(V_0)$ 和 $H_1 = f^{-1}(V_1)$ 组成, 即 $H = H_0 \cup H_1$, 如图 A.5.2b 所示。每个横条的厚度小于 $1/2$ 。

进一步考虑马蹄映射作用两次所成的像和逆像。 $f^2(S)$ 与 $S \cap f(S)$ 相交于 4 个竖条 V_{00}, V_{01}, V_{11} 和 V_{10} 。 $S \cap f(S) \cap f^2(S) = V_{00} \cup V_{01} \cup V_{11} \cup V_{10}$, 如图 A.5.3a 所示。 4 个竖条经过 f^{-2} 作用分别生成 4 个横条 H_{00}, H_{01}, H_{11} 和 H_{10} 。 $S \cap f^{-1}(S) \cap f^{-2}(S) = H_{00} \cup H_{01} \cup H_{11} \cup H_{10}$, 其中 $H_{jk} = f^{-2}(V_{jk})$ 。 如图 A.5.3b 所示。

再考虑马蹄映射像与逆像的交集。如图 A.5.4a 所示, 1 次马蹄映射

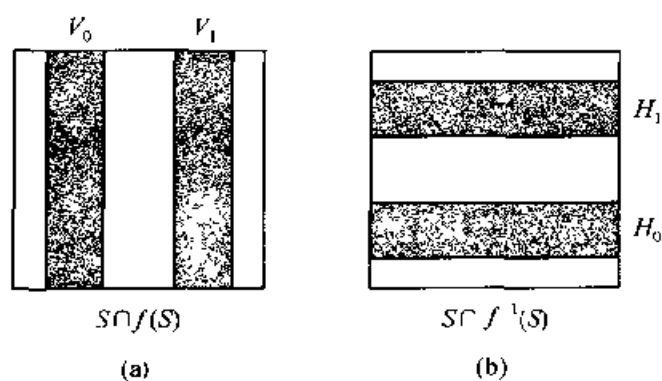


图 A.5.2 马蹄映射的像和逆像

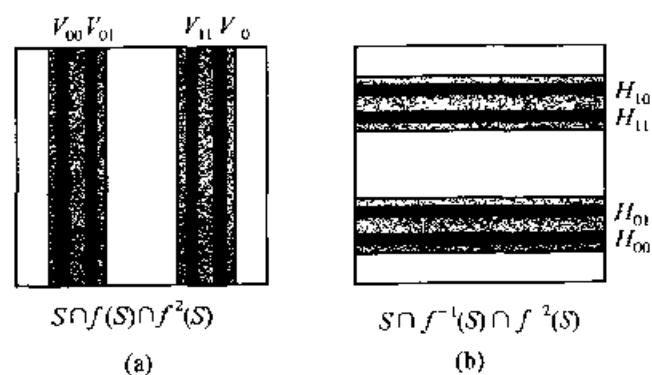


图 A.5.3 2次马蹄映射的像和逆像

的像与逆像的交集 $\Lambda_1 = f^{-1}(S) \cap S \cap f(S)$ 由 4 个小正方形构成。如图 A.5.4b 所示, 2 次马蹄映射的像与逆像的交集 $\Lambda_2 = f^{-2}(S) \cap f^{-1}(S) \cap S \cap f(S) \cap f^2(S)$ 由 16 个小正方形构成。

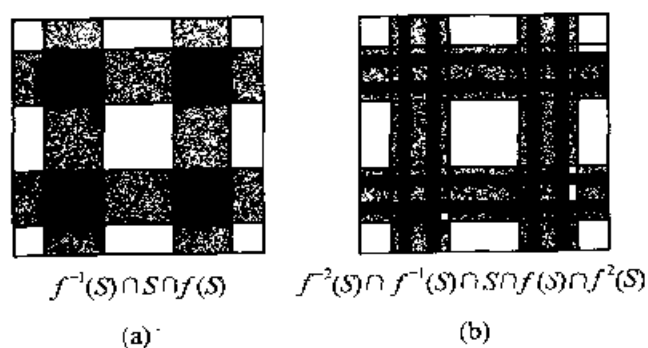


图 A.5.4 马蹄映射像与逆像的交集

一般地, k 次马蹄映射的像与逆像的交集

$$\Lambda_k = f^{-k}(S) \cap \cdots \cap f^{-2}(S) \cap f^{-1}(S) \cap S \cap f(S) \cap f^2(S) \cap \cdots \cap f^k(S) \quad (\text{A.5.12})$$

由 2^{2k} 个小正方形构成。 Λ_k 中的点在 j ($j \leq k$) 次马蹄映射或逆映射作用后仍在 Λ_k 中。取 $k \rightarrow \infty$ 。得到马蹄映射的不变集:

$$\Lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k \quad (\text{A.5.13})$$

Λ 中的点不论进行多少次马蹄映射或逆映射仍在 Λ 中。由于 $\mu > 2, v < 1/2$, 故当 $k \rightarrow \infty$ 时, 每个小正方形均收缩为点, 因此 Λ 为无穷点集。

现建立马蹄映射不变集 Λ 与两个符号的无穷序列所成符号空间 Σ_2 的同胚。对于任意 $x \in \Lambda$, 定义映射:

$$h(x) = (\cdots, a_{-i}, \cdots, a_{-2}, a_{-1}; a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots) \quad (\text{A.5.14})$$

其中符号序列中的符号

$$a_k = \begin{cases} 0 & f^k(x) \in H_0 \\ 1 & f^k(x) \in H_1 \end{cases} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm i, \cdots) \quad (\text{A.5.15})$$

可以证明映射 h 是连续的, 并且存在连续的逆映射 h^{-1} 。故 $h: \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ 为同胚。根据式(A.5.14)和(A.5.15)容易验证:

$$h \circ f = \sigma \circ h \quad (\text{A.5.16})$$

因此 (Λ, f) 和 (Σ_2, σ) 是拓扑共轭的。即 f 在 Λ 上的动力学行为是混沌的。这样也证明了 1963 年斯梅尔得到的著名结果: 马蹄映射具有一个闭不变集, 该不变集包含可数无穷多个周期为任意自然数的周期轨道和非周期轨道的不可数集合, 并存在非周期轨道可以任意接近不变集中任意点。

马蹄映射及其不变集具有结构稳定性。对映射 f 加以小扰动, 将使映射和逆映射分别得到的竖条和横条由矩形发生轻微变形成为曲边的长条, 仍可以横跨或纵越原正方形 S , 因而仍然可以彼此相交得到 Λ_k , 只是 Λ_k 由 2^{2k} 个小曲边形而非正方形构成。对 Λ_k 取极限 $k \rightarrow \infty$, 仍能得到不变集 Λ , 使得 (Λ, f) 和 (Σ_2, σ) 是拓扑共轭。

斯梅尔马蹄映射已推广到高维系统。在非线性系统中发现斯梅尔马蹄映射的存在为研究混沌的一种重要拓扑方法。

A.5.3 横截同宿点

对于具体的非线性系统, 要证实斯梅尔马蹄映射的存在, 往往涉及细致的估计。在实际问题中更为可行的是判断横截同宿点的存在。横截同

宿点为鞍点的稳定流形和不稳定流形横截相交的交点。这一概念在 § 6.4 中已有过直观的讨论。现从理论上分析同宿点与斯梅尔马蹄映射的关系,给出具有横截同宿点的映射呈现混沌性态的证明思路。为使问题不至于过分抽象,仅讨论二维映射的情形。

先叙述莫泽给出的判断马蹄映射存在性的一个定理。仍研究 (x, y) 平面上的正方形 $S = [0, 1] \times [0, 1]$ 。若对 $y \in [0, 1]$ 有 $0 \leq v(y) \leq 1$ 且存在常数 ν 使得

$$|v(y_1) - v(y_2)| \leq \nu |y_1 - y_2| \quad y_1, y_2 \in [0, 1] \quad (\text{A.5.17})$$

则称曲线 $x = v(y)$ 为**竖直曲线**。若对 $y \in [0, 1]$ 两条竖直曲线 $x = v_1(y)$ 和 $x = v_2(y)$ 满足 $0 \leq v_1(y) < v_2(y) \leq 1$ 则称集合

$$V = \{(x, y) | y \in [0, 1], v_1(y) \leq x \leq v_2(y)\} \quad (\text{A.5.18})$$

为**竖直条**。构成竖直条 V 的两条竖直曲线间最大距离

$$d(V) = \max_{y \in [0, 1]} |v_1(y) - v_2(y)| \quad (\text{A.5.19})$$

称为**竖直条 V 的宽度**。类似地可以定义**水平曲线 $y = h(x)$ 、水平条 H 及其宽度 $d(H)$** 。现设 S 中有 m 个互不相交的竖直条 V_i 和水平条 $H_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 。定义于 S 上的微分同胚 f 满足条件:(1) $f(H_i) = V_i (i = 1, 2, \dots, m)$, 且边界仍映为边界;(2) 对竖直条 $V \subset \bigcup_{i=1}^m V_i, f(V) \cap V_i$ 仍为竖直条, 且有 $d(f(V) \cap V_i) \leq \nu d(V)$, 其中 $0 < \nu < 1$ 为常数;(3) 对水平条 $H \subset \bigcup_{i=1}^m H_i, f^{-1}(H) \cap H_i$ 仍为水平条, 且有 $d(f^{-1}(H) \cap H_i) \leq \nu d(H)$ 。则可以证明存在 S 的子集 Λ 使得 (Λ, f) 与 (Σ_2, σ) 拓扑共轭。条件(1)表明 f 将至少两个水平条映为竖直条, 条件(2)表明 f 在水平方向压缩, 条件(3)表明 f 在竖直方向拉伸。因此莫泽的上述结论是斯梅尔马蹄映射构造方法的推广。

利用上述结论研究具有同宿点的映射 f 。其关键是构造两个被映为竖直条的水平条。考察 f 的双曲鞍点 p_s , 不失一般性设 p_s 的稳定流形 $W^s(p_s)$ 有水平切向, 不稳定流形 $W^u(p_s)$ 有铅垂切向。取包含 p_s 邻近一段的水平条 H_1 , 如图 A.5.5 所示, 存在正整数 I , 使得在 f^I 作用下 H_1 映射为竖直条 V_1 , 且 $f^I(H_1) = V_1$ 。

再取包含 p_s 的正方形 S 使 $S \cap H_1$ 和 $S \cap V_1$ 分别为水平条和竖直条。 S 在映射 f 作用下的像沿 $W^u(p_s)$ 拉伸, 同宿点 $q \in W^u(p_s)$, 故存在

正整数 J 使得 $q \in f^J(S)$ 。在逆映射 f^{-1} 作用下 S 的像沿 $W^s(p_s)$ 拉伸, 同宿点 $q \in W^s(p_s)$, 故存在正整数 K 使得 $q \in f^{-K}(S)$ 。令 $Q = f^J(S) \cap f^{-K}(S)$, 则 $q \in Q$ 。 $H_2 = f^{-J}(Q)$ 为 S 内在 $W^s(p_s)$ 上方的水平条, $V_2 = f^K(Q)$ 为 S 内在 $W^u(p_s)$ 右方的竖直条, 可取 H_1 和 V_1 充分窄, 使得 H_1 和 H_2, V_1 和 V_2 各不相交。映射 f^{J+K} 将 H_2 映为 V_2 且边界映为边界。取 $N = \max\{I, J+K\}$, 则 H_1 和 H_2 在映射 f^N 之下映为纵向穿越正方形 S 的二竖直条, 如图 A.5.6 所示。可以验证前述莫泽定理的条件满足, 故存在正整数 N 和 S 的子集 Λ , 使得系统 (Λ, f^N) 和 (Σ_2, σ) 拓扑共轭。上述结论称为斯梅尔-伯克霍夫同宿定理。

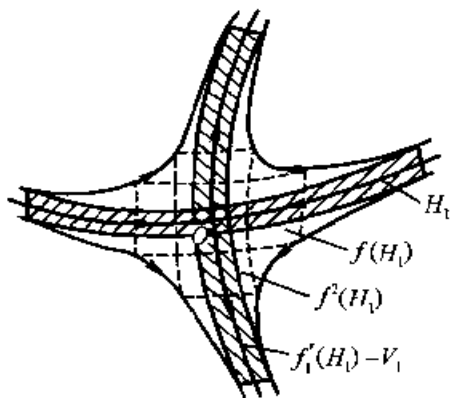


图 A.5.5 鞍点邻域的水平条和竖直条

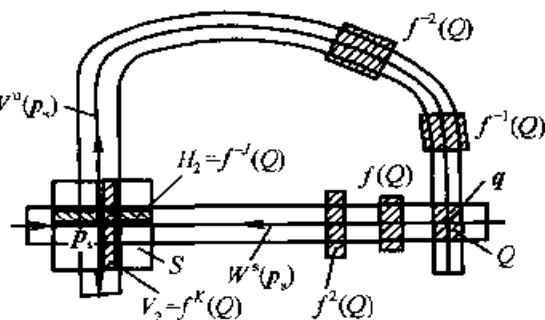


图 A.5.6 鞍点与同宿点的水平条和竖直条

A.5.4 拓扑意义上的混沌与可观测的混沌

拓扑方法描述的仅是具有混沌性态的不变集, 不一定具有吸引性。从实验或数值计算中可观测到的混沌必须是具有吸引性的不变集, 即混沌吸引子, 并且要求有足够大的吸引盆。因此, 对于实际系统, 即使可以判定具有拓扑意义上的混沌不变集, 仍没有充分理由断定该不变集就是实际观测到的混沌。这是拓扑方法的局限所在, 也是以混沌的拓扑描述为基础的解析预测方法的局限所在。

尽管混沌的拓扑描述存在上述局限, 横截同宿点的出现仍为预测混沌提供了重要的线索。双曲鞍点的稳定流形是不同吸引子的吸引盆边界, 它与不稳定流形横截相交后, 这种盆边界变得极为复杂而成为分形盆边界。

上述不变集本身也具有分形性质。可以证明,集合 Σ_A 在式(A.5.3)定义的距离下是紧致、完全和完全不连通的空间,根据拓扑学中的相关定理它与康托集合同胚。斯梅尔马蹄映射中不变集 Λ 的分形特征更为直观。

附录六 梅利尼科夫函数的推导

当 $\varepsilon \neq 0$ 但充分小时,系统(6.4.1)存在唯一的双曲周期轨道 $x_{se}(t) = p_s + O(\varepsilon)$ 。因此,系统(6.4.1)的庞加莱映射存在唯一双曲鞍点 $p_{se} = p_s + O(\varepsilon)$ 。此时 p_{se} 的稳定流形和不稳定流形不再重合,但仍可认为充分接近 $\varepsilon = 0$ 时的同宿轨道 $x^h(t - \tau)$,故可设其位于稳定流形和不稳定流形上的轨道的方程分别为

$$x^s(t, \tau) = x^h(t - \tau) + \varepsilon x_1^s(t, \tau) + O(\varepsilon^2) \quad (A.6.1)$$

$$x^u(t, \tau) = x^h(t - \tau) + \varepsilon x_1^u(t, \tau) + O(\varepsilon^2) \quad (A.6.2)$$

在时刻 t , 稳定流形和不稳定流形上两点的位移为

$$\begin{aligned} d(t, \tau) &= x^s(t, \tau) - x^u(t, \tau) \\ &= \varepsilon(x_1^s(t, \tau) - x_1^u(t, \tau)) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (A.6.3)$$

将位移 $d(t, \tau)$ 投影到未受扰动系统的同宿轨道 x^h 在 t 时刻的点 $x^h(t -$

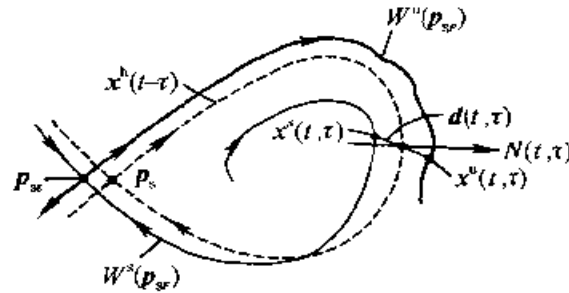


图 A.6.1 推导梅利尼科夫函数示意图

$\tau)$ 处的法线 N , 如图 A.6.1 所示

$$N(t, \tau) = (-f_2(x^h(t - \tau)), f_1(x^h(t - \tau))) \quad (A.6.4)$$

其中 f_1, f_2 为 f 的投影。对于矢量 $a = (a_1, a_2)^T$ 和 $b = (b_1, b_2)^T$, 定义算子 \wedge

$$a \wedge b = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (A.6.5)$$

得到

$$d_N(t, \tau) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{f} \wedge \mathbf{d} = \epsilon(d_N^s - d_N^u) + O(\epsilon^2) \quad (\text{A.6.6})$$

其中

$$d_N^s = \mathbf{f} \wedge \mathbf{x}_1^s, \quad d_N^u = \mathbf{f} \wedge \mathbf{x}_1^u \quad (\text{A.6.7})$$

对 d_N^s 取时间微分, 得到

$$\dot{d}_N^s = \dot{\mathbf{f}} \wedge \mathbf{x}_1^s + \mathbf{f} \wedge \dot{\mathbf{x}}_1^s = \mathbf{D}\mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{x}}^h \wedge \mathbf{x}_1^s + \mathbf{f} \wedge \dot{\mathbf{x}}_1^s \quad (\text{A.6.8})$$

其中 $\mathbf{D}\mathbf{f}$ 在 \mathbf{x}^h 处计算。将式(A.6.1)代入方程(6.4.1), 略去 ϵ^2 及更高阶项, 得到

$$\dot{\mathbf{x}}_1^s = \mathbf{D}\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}_1^s + \mathbf{g}(\mathbf{x}^h(t - \tau), t) \quad (\text{A.6.9})$$

式(A.6.1)略去与 ϵ^2 同阶项后, 和式(A.6.9)代入式(A.6.8), 得到

$$\dot{d}_N^s = \mathbf{D}\mathbf{f} \cdot \mathbf{f} \wedge \mathbf{x}_1^s + \mathbf{f} \wedge \mathbf{D}\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}_1^s + \mathbf{f} \wedge \mathbf{g} \quad (\text{A.6.10})$$

整理为

$$\dot{d}_N^s = \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{f})\mathbf{f} \wedge \mathbf{x}_1^s + \mathbf{f} \wedge \mathbf{g} \quad (\text{A.6.11})$$

即

$$\dot{d}_N^s = \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{f})d_N^s + \mathbf{f} \wedge \mathbf{g} \quad (\text{A.6.12})$$

式(A.6.12)为关于 d_N^s 的一阶线性非齐次微分方程, 可从 τ 到 $+\infty$ 积分得

$$d_N^s(+\infty, \tau) - d_N^s(\tau, \tau) = \int_{\tau}^{+\infty} \mathbf{f} \wedge \mathbf{g} e^{-\int_0^{t-\tau} \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}^h(z)))dz} dt \quad (\text{A.6.13})$$

利用式(A.6.7)和(6.4.3), 并注意到 \mathbf{p}_s 为(6.4.2)的平衡点, 有

$$d_N^s(+\infty, \tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^h(+\infty - \tau)) \wedge \mathbf{x}_1^s = \mathbf{f}(\mathbf{p}_s) \wedge \mathbf{x}_1^s = 0 \quad (\text{A.6.14})$$

则有

$$d_N^s(\tau, \tau) = - \int_{\tau}^{+\infty} \mathbf{f} \wedge \mathbf{g} e^{-\int_0^{t-\tau} \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}^h(z)))dz} dt \quad (\text{A.6.15})$$

同理, 有

$$d_N^u(\tau, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \mathbf{f} \wedge \mathbf{g} e^{-\int_0^{t-\tau} \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}^h(z)))dz} dt \quad (\text{A.6.16})$$

由式(A.6.6), (A.6.15)和(A.6.16)得知, 若定义梅利尼科夫函数

$$M(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}^h(t - \tau)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{x}^h(t - \tau), t) e^{-\int_0^{t-\tau} \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}^h(z)))dz} dt \quad (\text{A.6.17})$$

则有

$$d_N(\tau, \tau) = -\varepsilon M(\tau) + O(\varepsilon^2) \quad (\text{A.6.18})$$

进行积分变量变换, 式(A.6.17)可写为

$$M(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x^h(t)) \wedge g(x^h(t), t + \tau) e^{-\int_0^t \text{tr}(Df(x^h(z))) dz} dt \quad (\text{A.6.19})$$

附录七 什尔尼科夫定理的证明思路

研究三维非线性系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= ax - \beta y + P(x, y, z) \\ \dot{y} &= \beta x + \alpha y + Q(x, y, z) \\ \dot{z} &= \lambda z + R(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.7.1})$$

其中光滑函数 P, Q, R 及其导数在原点 $O(0, 0, 0)$ 处均为零。因此原点 O 为系统(A.7.1)的平衡点。设 $\alpha < 0$ 和 $\lambda > 0$, 则原点 O 为系统(A.7.1)的鞍焦点。进一步假设系统(A.7.1)存在鞍焦型同宿轨道 Γ 当 $t \rightarrow \pm \infty$ 时都趋于原点 O 。以下在本征值满足:

$$\lambda > -\alpha > 0 \quad (\text{A.7.2})$$

时, 构造庞加莱映射使之具有斯梅尔马蹄映射的性质。

在三维相空间原点附近定义有限圆柱面 Σ_0 和平面 Σ_1 分别为

$$\Sigma_0 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = \rho_0^2, \quad 0 < z < z_1\} \quad (\text{A.7.3})$$

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < \rho_0^2, \quad 0 < z = z_1\} \quad (\text{A.7.4})$$

若 r_0 和 z_1 充分小, 可以认为在 Σ_0 和 Σ_1 上及其所围成空间区域中系统(A.7.1)可用线性化系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= ax - \beta y \\ \dot{y} &= \beta x + \alpha y \\ \dot{z} &= \lambda z \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.7.5})$$

代替。由式(A.7.5)解出

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} [x(0) \cos \beta t - y(0) \sin \beta t] \\ e^{\alpha t} [x(0) \sin \beta t + y(0) \cos \beta t] \\ z(0) e^{\lambda t} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7.6})$$

设 $(x(0), y(0), z(0))$ 为 Σ_0 上任意点, 令 $\theta = \arctan(y(0)/x(0))$, 则该点位置可用 (θ, z) 描述。相应地 Σ_1 上点可用 (x, y) 描述。由式(A.7.6)

中 $z(t)$ 的表达式, 该点沿相轨迹到 Σ_1 的时间 t_0 满足 $z_1 = z(0)e^{\lambda t_0}$, 即 $t_0 = \ln(z_1/z(0))/\lambda$ 。定义映射 $\Psi: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$, 使 Σ_0 上任意点对应于以该点为起始点的相轨迹与 Σ_1 的交点, 如图 A.7.1 所示。将时间 t_0 代入式 (A.7.6) 中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的表达式, 令 $\gamma = \beta t_0 = \beta \ln(z_1/z(0))/\lambda$, 得到映

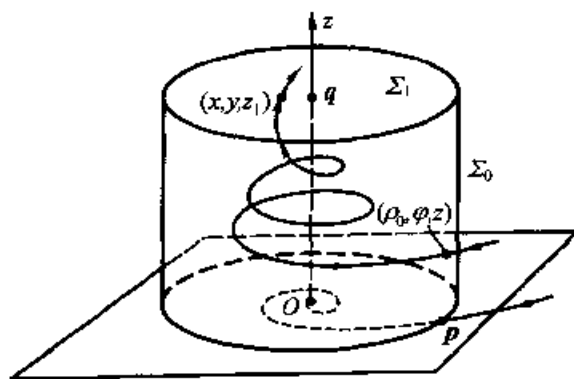


图 A.7.1 截面 Σ_0 和 Σ_1 及映射 Ψ 示意图

射 Ψ 的表达式:

$$\begin{aligned} \Psi(\varphi, z) &= (\Psi_1(\varphi, z), \Psi_2(\varphi, z)) \\ &= \left(\rho_0 \left(\frac{z_1}{z} \right)^{\frac{\alpha}{\lambda}} \cos(\varphi + \gamma), \rho_0 \left(\frac{z_1}{z} \right)^{\frac{\alpha}{\lambda}} \sin(\varphi + \gamma) \right) \quad (\text{A.7.7}) \end{aligned}$$

注意到映射 Ψ 将 Σ_0 上的线段 (φ 为常数) 映为 Σ_1 上环绕 z 轴的对数螺线。

微分式 (A.7.7), 得到映射 Ψ 的雅可比矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\Psi(\varphi, z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \rho_0 \left(\frac{z_1}{z} \right)^{\alpha/\lambda} \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \frac{-\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi}{\lambda z} \\ \cos \varphi & \frac{-\alpha \sin \varphi - \beta \cos \varphi}{\lambda z} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7.8}) \end{aligned}$$

其行列式为

$$\det(\mathbf{D}\Psi) = \frac{1}{\lambda} \alpha \rho_0^2 z_1^{2\alpha/\lambda} z^{-(1+2\alpha/\lambda)} \quad (\text{A.7.9})$$

式(A.7.9)表明 Σ_0 中的铅垂线段 $\{(\varphi, z) | \varphi = \text{常数}, 0 < z < z_0\}$ 被映射为最大半径为 $\rho_0(z_1/z_0)^{1/\lambda}$ 的对数螺线, 且当 $z_0 \rightarrow \infty$ 时, 线段长度被拉伸为无穷。

设原点 O 的不稳定流形 $W^u(O)$ 分别与 Σ_0 和 Σ_1 相交于 p 和 q 。不失一般性, 设 p 在 x 轴上, 即 $\varphi = 0$ 。 z_1 取充分小, 可设 q 在 z 轴上。沿 $W^u(O)$ 从 q 到 p 不存在平衡点, 故可以从 Σ_1 上包含 q 的小邻域到圆柱面

$$\tilde{\Sigma}_0 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = \rho_0^2, |z| < z_1\} \quad (\text{A.7.10})$$

上包含 p 的小邻域定义微分同胚 Φ , 它将 Σ_1 上含 q 邻域中任意点 q' 映到从该点出发相轨迹与 $\tilde{\Sigma}_0$ 的第一个交点, 且满足 $\Phi(q) = p$, 如图 A.7.2 所示。因此, 可以在 Σ_0 上 p 的小邻域内定义庞加莱映射 $P = \Phi\Psi: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$ 。

取 Σ_0 上的一个小邻域

$$V = \{(\rho, \varphi, z) | \rho = \rho_0, |\varphi| < \delta, 0 < z < \varepsilon\} \quad (\text{A.7.11})$$

其中选择 ε 使 $\Psi(V)$ 包含在 Φ 的定义域中。此时, 庞加莱映射 P 在 V 上有定义。 Ψ 将 V 中每一条铅垂线段映射为 Σ_1 上环绕 q 的对数螺线, 而 Φ 又将该对数螺线同胚地映射到 $\tilde{\Sigma}_0$ 上。若选择 δ 远远大于 ε , 则 $P(V)$ 中每一条对数螺线在达到 V 顶端不再切割 V 之前垂直切割 V 多次, 如图 A.7.3 所示。

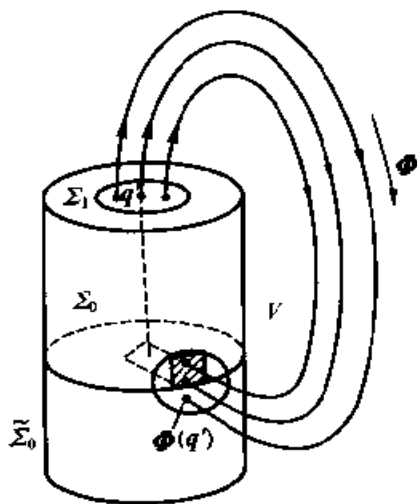


图 A.7.2 庞加莱映射示意图

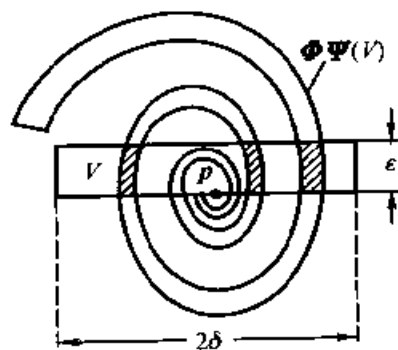


图 A.7.3 V 和 $P(V)$ 示意图

现确定 V 的子集使 P 在其上具有斯梅尔马蹄映射的性质。根据式 (A.7.7), 若 z 沿着 $z \in (z', z'')$ 的铅垂段 $J \subset V$ 变化, 其中 z' 和 z'' 满足 $(\beta/\lambda)[\ln(z_1/z') - \ln(z_1/z'')] = 2\pi$ 即 $z''/z' = e^{2\pi\lambda/\beta}$, 则 $\Psi(J)$ 使对数螺线旋转一周。 $\Psi(J)$ 与 q 之间的距离与 $(z_1/z)^{a/\lambda}$ ($z \in J$) 同数量级。当式 (A.7.2) 成立时, $z \rightarrow 0$ 时有比值 $(z_1/z)^{a/\lambda}/z \rightarrow \infty$ 。令 V 定义式 (A.7.11) 中 $\delta > 0$ 为小量, 取 (z', z'') 具有性质: (1) $z''/z' = e^{2\pi\lambda/\beta}$; (2) z' 和 z'' 充分小, 使 $(z_1/z)^{a/\lambda} < \delta$ 对一切 $z \in (z', z'')$; (3) 若 $|\varphi| < \delta$, 则映射 $P(\rho_0, \varphi, z')$ 和 $P(\rho_0, \varphi, z'')$ 的像在 $\tilde{\Sigma}_0$ 上。在 V 中选取子集:

$$W = \{(\rho_0, \varphi, z) \in V | z \in (z', z'')\} \quad (\text{A.7.12})$$

根据 (z', z'') 上述性质, $W \cap P(W)$ 具有斯梅尔马蹄的特点, 如图 A.7.4 所示。

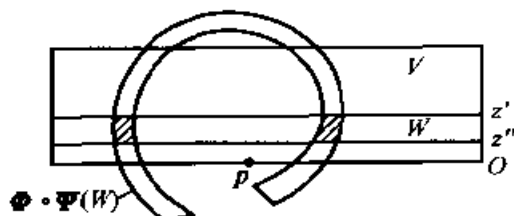


图 A.7.4 W 和 $P(W)$ 示意图

可以从数学上严格证明 (W, P) 与 (Σ_2, σ) 拓扑共轭。为此需要进行一系列数值估计, 然后利用 A.5.3 中所述莫泽定理一种改进的形式, 具体过程此处从略, 参阅文献 [51] 第 318~325 页或文献 [120]。

习题答案

第一章

- 1.1 $(0,0)$ 不稳定, $(\pm \frac{\pi}{2}, 0)$ 稳定。
- 1.2 (1) 稳定; (2) a 和 b 为正时渐近稳定, a 和 b 为零时稳定, a 和 b 为负时不稳定; (3) 渐近稳定; (4) 渐近稳定; (5) $a > 0$ 时不稳定, $a = 0$ 稳定, $a < 0$ 渐近稳定; (6) 渐近稳定; (7) 不稳定; (8) 不稳定。
- 1.5 (1) 渐近稳定; (2) 不稳定; (3) $a < -0.5$ 时渐近稳定, $a = -0.5$ 时不能判定, $a > -0.5$ 时不稳定; (4) 渐近稳定。
- 1.10 $\omega \leq \sqrt{\frac{3g}{2l}}$ 时, $\varphi_s = 0$ 稳定; $\omega > \sqrt{\frac{3g}{2l}}$ 时, $\varphi_s = 0$ 不稳定, $\varphi_s = \pm \arccos(3g/2l\omega^2)$ 稳定。
- 1.11 $k \leq 2mg/(2r-l)$ 时, $\varphi_s = 0$ 稳定; $k > 2mg/(2r-l)$ 时, $\varphi_s = 0$ 不稳定, $\varphi_s = \pm \arccos \frac{kl}{2(rk-mg)}$ 稳定。
- 1.14 (1) 不稳定焦点; (2) 不稳定退化结点; (3) 不稳定结点; (4) 中心; (5) 稳定结点; (6) 鞍点; (7) 稳定退化结点; (8) 稳定焦点。
- 1.15 (1) 稳定结点 $(1,0)$ 和 $(0,2)$, 不稳定结点 $(0,0)$, 鞍点 $(0.5,0.5)$; (2) 稳定结点 $(2,1)$, 不稳定结点 $(1,2)$, 鞍点 $(0,0)$; (3) 稳定结点 $(-1,-1)$, 鞍点 $(0,0)$; (4) 稳定结点 $(-2,-1)$, 不稳定结点 $(2,1)$, 鞍点 $(-1,-2)$ 和 $(1,2)$ 。
- 1.17 (1) 半稳定极限环 $x_1^2 + x_2^2 = 1$; (2) 稳定极限环 $x_1^2 + x_2^2 = 1$, 不稳定极限环 $x_1^2 + x_2^2 = 4$; (3) 无极限环; (4) 半稳定极限环 $x_1^2 + x_2^2 = 1/n^2$ 。
- 1.18 当 $a < -1$ 时, 奇点 $(0,0)$ 渐近稳定, 无极限环; 当 $a = -1$ 时, 奇点 $(0,0)$ 渐近稳定, 极限环 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ 半稳定; 当 $-1 < a < 0$ 时, 奇点 $(0,0)$ 渐近稳定, 极限环 $x_1^2 + x_2^2 = 1 - \sqrt{1+a}$ 不稳定, 极限环 $x_1^2 + x_2^2 = 1 + \sqrt{1+a}$ 渐近稳定; 当 $a \geq 0$ 时, 奇点 $(0,0)$ 不稳定, 极限环 $x_1^2 + x_2^2 = 1 + \sqrt{1+a}$ 渐近稳定。
- 1.20 在半平面 $x > \frac{c}{2c_1}$ 和 $x < \frac{c}{2c_1}$ 中均无极限环, 但不能判定是否有与直线 $x = \frac{c}{2c_1}$ 相交的极限环。

第二章

$$2.1 \quad \pm \sqrt{1 - 2\epsilon^2 A^2} - s^2 = B/A, \epsilon A \leq 1/\sqrt{2}.$$

$$2.2 \quad A^2 \left\{ \left[k - m\omega^2 - \frac{\alpha\omega}{A^2} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{1-A^2}} \right) \right]^2 + (\omega\epsilon)^2 \right\} = F^2.$$

$$2.3 \quad \left(k_1 + \frac{3}{4}k_2 A^2 - m\omega^2 \right)^2 + \left(\frac{4\mu mg}{\pi A} \right)^2 = \left(\frac{F_0}{A} \right)^2.$$

$$2.4 \quad x(t) = a \cos \left[\left(1 - \frac{\epsilon a^2}{8} \right) \omega_0 t + \alpha \right].$$

$$2.5 \quad x(t) = a \cos \left[\left(1 - \frac{5\epsilon a^4}{16\omega_0^2} \right) \omega_0 t + \alpha \right].$$

$$2.6 \quad (1 + 4c^2 x^2) \ddot{x} + 4c^2 \dot{x}^2 x + (2gc - \omega^2)x = 0, \\ x(t) = a \cos \left[(1 - c^2 a^2) \sqrt{2gc - \omega^2} t + \alpha \right].$$

$$2.7 \quad \left(\frac{1}{12} l^2 + r^2 \varphi^2 \right) \ddot{\varphi} + r^2 \dot{\varphi}^2 + gr \varphi \cos \varphi = 0, \\ \varphi(t) = a \cos \left\{ \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{24r^2}{l^2} + \frac{3}{2} \right) a^2 \right] \frac{2}{l} \sqrt{3gr} t + \alpha \right\}.$$

$$2.8 \quad \left(m_1 + \frac{m_2 x^2}{l^2 - x^2} \right) \ddot{x} + \frac{m_2 l^2 x \dot{x}^2}{(l^2 - x^2)^2} + kx + m_2 g \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}} = 0,$$

$$x(t) = al \cos \left\{ \left[1 + \left(\frac{3g}{16l \sqrt{\frac{k}{m_1} + \frac{m_2 g}{m_1 l}}} - \frac{1}{4} \right) \frac{m_2}{m_1} \right] \sqrt{\frac{k}{m_1} + \frac{m_2 g}{m_1 l}} t + \alpha \right\}.$$

$$2.9 \quad x(t) = a \cos[(1 - \epsilon^2 a^2)t + \alpha] - \epsilon a^2.$$

$$2.10 \quad x(t) = a e^{-\epsilon \delta t} \cos \left(t - \frac{3a^2}{16\delta} e^{-2\epsilon \delta t} + \alpha \right).$$

$$2.11 \quad x(t) = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\epsilon \delta a^2 t}} \cos \left[\omega_0 t + \frac{3b}{4\omega_0 \delta} \ln \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon \delta a^2 t \right) + \alpha \right].$$

$$2.12 \quad (1) \quad x(t) = a \cos \left[\left(1 + \frac{4\epsilon a}{3\pi \omega_0^2} \right) \omega_0 t + \alpha \right];$$

$$(2) \quad x(t) = \left[\left(\frac{2\delta_1}{\pi \delta_2 \omega_0} + a \right) e^{-\epsilon \delta_2 t} - \frac{2\delta_1}{\pi \delta_2 \omega_0} \right] \cos(\omega_0 t + \alpha);$$

$$(3) \quad x(t) = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{\frac{3\delta_1}{2\delta_2}}} \tan \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{2\delta_2}{3\delta_1}} \omega_0 a \right) - \frac{2\epsilon}{\pi} \sqrt{\frac{2\delta_1 \delta_2}{3}} t \right] \cos(\omega_0 t + \alpha);$$

$$(4) \quad x(t) = \frac{a \cos(t + \alpha)}{e^{\epsilon \delta_1 t} + \frac{4\delta_2 a}{3\pi \delta_1} (e^{\epsilon \delta_1 t} - 1)};$$

$$(5) \quad x(t) = \frac{a \cos(\omega_0 t + \alpha)}{\frac{4\delta_2 u \omega_0}{3\pi\delta_1} (e^{-\alpha_1 t} + 1) - e^{-\alpha_1 t}}.$$

$$2.13 \quad \dot{a} = -\frac{2\varepsilon F}{\pi} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

$$2.14 \quad x(t) = \left(A - \sqrt{\frac{A}{\pi g}} \rho t \right) \cos \left\{ 2\sqrt{\frac{g}{\pi A}} t - \sqrt{\frac{g}{\pi A}} \left[t + \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\pi g}{A}} \ln \left(1 - \frac{\rho t}{\sqrt{\pi g A}} \right) \right] \right\}.$$

$$2.15 \quad \omega = \omega_0 \left[1 + \frac{\varepsilon a_0^3}{2\pi} G(\alpha) \right], \text{ 其中 } \alpha = a/a_0,$$

$$G(\alpha) = \begin{cases} 0 & (\alpha \leq 1) \\ (2 + 1.5\alpha^2) \arccos(\alpha^{-1}) - (1.5 + 3\alpha^{-2}) \sqrt{\alpha^2 - 1} & (\alpha > 1). \end{cases}$$

$$2.16 \quad (1) \quad \dot{a} = \frac{2\varepsilon}{\omega_0} \omega_1 \omega_2 f_1 f_2 \sin[(\omega_0 - \omega_1 - \omega_2)t + \varphi],$$

$$a\dot{\varphi} = \frac{2\varepsilon}{\omega_0} \omega_1 \omega_2 f_1 f_2 \cos[(\omega_0 - \omega_1 - \omega_2)t + \varphi];$$

$$(2) \quad \dot{a} = -\frac{2\varepsilon}{\omega_0} \omega_1 \omega_2 f_1 f_2 \sin[(\omega_0 - \omega_1 + \omega_2)t + \varphi],$$

$$a\dot{\varphi} = \frac{2\varepsilon}{\omega_0} \omega_1 \omega_2 f_1 f_2 \cos[(\omega_0 - \omega_1 + \omega_2)t + \varphi];$$

$$\text{其中 } f_i = \frac{F_i}{2(\omega_0^2 - \omega_i^2)} \quad (i=1, 2).$$

$$2.17 \quad x(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{Qe^{2\alpha t} + C}} \cos \left[\omega_0 t + \frac{R}{2Q} \ln(e^{2\alpha t} + C) + D \right]$$

$$\text{其中 } Q = \frac{3 + 8\omega_0^2 s^2}{2(1 + 4\omega_0^2 s^2)}, R = \frac{\omega_0 s}{2(1 + 4\omega_0^2 s^2)}, C \text{ 和 } D \text{ 为积分常数。}$$

$$2.18 \quad \dot{a}_1 = \frac{b_1}{4\omega_{10}} a_1 a_2 \sin \psi, a_1 \dot{\psi}_1 = -\frac{b_1}{4\omega_{10}} a_1 a_2 \cos \psi;$$

$$\dot{a}_2 = \frac{b_2}{4\omega_{20}} \sin \psi, a_2 \dot{\psi}_2 = -\frac{b_2}{4\omega_{20}} \cos \psi;$$

$$\dot{a}_3 = -\frac{b_3}{4\omega_{30}} \sin \psi, a_3 \dot{\psi}_3 = -\frac{b_3}{4\omega_{30}} \cos \psi;$$

$$\text{其中 } \psi = (\omega_{30} - \omega_{10} - \omega_{20})t + \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2.$$

$$2.19 \quad (1) \quad \dot{a}_1 = \frac{\varepsilon b_1}{4\omega_{10}} a_1 a_2 \sin \psi_1 + \frac{\varepsilon F_1}{4\omega_{10}} \sin \psi_2,$$

$$a_1 \dot{\psi}_1 = -\frac{\varepsilon b_1}{4\omega_{10}} a_1 a_2 \cos \psi_1 - \frac{\varepsilon F_1}{4\omega_{10}} \cos \psi_2;$$

$$\dot{a}_2 = -\frac{\varepsilon b_2}{4\omega_{20}} a_1^2 \sin \psi_1, \quad a_2 \dot{\psi}_2 = -\frac{\varepsilon b_2}{4\omega_{20}} a_1^2 \cos \psi_1;$$

其中 $\psi_1 = (\omega_{20} - 2\omega_{10})t + \varphi_2 - 2\varphi_1$, $\psi_2 = (\omega_1 - \omega_{10})t - \varphi_1$ 。

$$(2) \dot{a}_1 = \frac{\varepsilon b_1}{4\omega_{10}} a_1 a_2 \sin \psi_1, \quad a_1 \dot{\varphi}_1 = -\frac{\varepsilon b_1}{4\omega_{10}} a_1 a_2 \cos \psi_2;$$

$$\dot{a}_2 = -\frac{\varepsilon b_2}{4\omega_{20}} a_1^2 \sin \psi_1 + \frac{\varepsilon F_2}{4\omega_{20}} \sin \psi_2,$$

$$a_2 \dot{\varphi}_2 = -\frac{\varepsilon b_2}{4\omega_{20}} a_1^2 \cos \psi_1 - \frac{\varepsilon F_2}{4\omega_{20}} \cos \psi_2;$$

其中 $\psi_1 = (\omega_{20} - 2\omega_{10})t + \varphi_2 - 2\varphi_1$, $\psi_2 = (\omega_2 - \omega_{20})t - \varphi_2$ 。

第三章

3.1 (1) 能,否; (2) 趋于静止; (3) $\Delta E = 2M \arctan(h/a)$ 。

3.2 能。

$$3.4 \quad \Delta a = \frac{2mg}{k}(f_r - f_l)。$$

3.6 $J^2 - 4\pi^2 c^2 x_0^2 \geq 0$ 且初始振幅并小于 x_0 。

3.7 $\omega = 1 + 3\varepsilon/2, a = 2$ 。

$$3.8 \quad x(t) = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + (4-a^2)e^{-a}}} \cos \left\{ t + \frac{3}{2} \ln \left[\frac{a^2}{4} (e^a - 1) + 1 \right] + \alpha \right\}。$$

3.9 $\omega = 1, a = \sqrt[4]{8} \approx 1.68$ 。

$$3.10 \quad x(t) = 2^{3/4} a [a^4 + (8 - a^4)e^{-2\varepsilon t}]^{-1/4} \cos(t + \alpha)。$$

第四章

4.1 $\omega > 313 \text{ rad/s} = 49.8 \text{ Hz}$ 。

4.2 稳定。

4.3 (1) 稳定; (2) 不稳定。

4.4 稳定。

$$4.5 \quad \ddot{x} + \frac{1}{ml_1} \left(F_0 + \frac{REA}{l_0} \varphi_0 \sin \omega t \right) x = 0, \text{ 不稳定。}$$

$$4.6 \quad \ddot{y} + \frac{24EI}{ml^3} \left(1 - \frac{F_0 l_0^2}{\pi EI} - \frac{F_1 l_0^2}{\pi EI} \sin \omega t \right) y = 0, \text{ 不稳定。}$$

4.7 稳定。

$$4.8 \quad a = \sqrt{\varepsilon} x_0 \left[\frac{l(0)}{l(\tau)} \right]^{3/4}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l(\tau)}} \left\{ 1 + \frac{1}{16} \varepsilon^2 \left[\frac{l(0)}{l(\tau)} \right]^{5/2} \right\}。$$

$$4.9 \quad x(t) = \frac{1}{2\varepsilon} \left(-1 + \sqrt{l - \frac{4\varepsilon F}{\omega_0^2}} \right) + \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{2F}{\varepsilon}} \cos \frac{\omega t}{2}, \text{ 不稳定。}$$

4.10 $\left(\omega_0^2 - \frac{\omega^2}{9}\right) + \frac{3}{4}\epsilon^{1/3}(2F)^{2/3} = 0$, $\omega > 3\omega_0$ 时稳定, $\omega < 3\omega_0$ 时不稳定。

4.12 $\dot{a} = \frac{\epsilon a}{2\omega_0} \sin[(2\omega_0 - 3)t + 2\varphi]$, $\dot{\varphi} = \frac{\epsilon}{2\omega} \cos[(2\omega_0 - 3)t + 2\varphi]$ 。

4.13 $\dot{a} = \frac{\epsilon a^3}{8\omega_0} \sin[(4\omega_0 - 2)t + 4\varphi]$, $\dot{\varphi} = \frac{\epsilon a^2}{2\omega_0} \cos[(4\omega_0 - 2)t + 4\varphi]$ 。

4.14 $\dot{a}_1 = \frac{\epsilon c_{12}}{2\omega_{10}} a_2 \sin \psi$, $a_1 \dot{\varphi}_1 = \frac{\epsilon c_{12}}{2\omega_{10}} a_2 \cos \psi$,

$\dot{a}_2 = \frac{\epsilon c_{21}}{2\omega_{20}} a_1 \sin \psi$, $a_2 \dot{\varphi}_2 = \frac{\epsilon c_{21}}{2\omega_{20}} a_1 \cos \psi$,

其中 $\psi = (\omega_{10} + \omega_{20} - \omega)t + \varphi_1 + \varphi_2$ 。

第 五 章

5.1 $\mu = 0$ 在 $(0, 0)$ 处叉式分岔。

5.2 $\mu = 0$ 在 $(0, 0)$ 处跨临界叉式分岔。

5.3 $\mu = 0$ 在 $(0, 0)$ 和 $(-2, 0)$ 处跨临界分岔, $\mu = -0.25$ 在 $(-1, -0.25)$ 处鞍结分岔。

5.4 $\dot{x} = \mu x - 2x^3 + o(x^3)$ 超临界叉式分岔。

5.6 平衡点 $O(0, 0)$, $W^s(O) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 | X = 0\}$, $W^u(O) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 | Y = X^2/3\}$; $E^s(O) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 | X = 0\}$, $E^u(O) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 | Y = 0\}$ 。

5.7 $h(x) = cx^2 + O(x^4)$, $\dot{x} = (a + c)x^3 + O(x^5)$ 。

5.8 $h(x, y) = -x^2 - y^2 + \dots$; $\dot{x} = -y - x^3 - xy^2 + \dots$, $\dot{y} = x - x^2y - y^3 + \dots$; 稳定。

5.9 $\dot{x} = \mu x - 2x^3 + o(x^3)$, 超临界叉式分岔。

5.10 $\dot{u} = 3u + av^3$, $\dot{v} = v$ 。

5.11 $\dot{u} = 3u + av^3$, $\dot{v} = 2v$; $x = u + u^2 + uv + v^2$, $y = v + u^2 + uv$ 。

5.12 $\dot{y}_1 = -y_2 + (ay_1 - by_2)(y_1^2 + y_2^2)$, $\dot{y}_2 = y_1 + (ay_1 + by_2)(y_1^2 + y_2^2)$ 。

5.13 $h(x, \mu) = x^3 - (\mu - 0.5)x$, $(x, \mu) = (0, 0.5)$, 超临界叉式分岔。

5.14 $\mu = 0$ 在 $(0, 0)$ 霍普夫分岔。

5.15 当 $\mu = 0$ 时, $\omega = \sqrt{2}$, $c = 0.5$, $a = -2\sqrt{2}$, 霍普夫分岔, $\mu > 0$ 有稳定极限环。

5.16 平衡点 $(q, \mu/q)$ 当 $\mu < 1 + q^2$ 时稳定, 当 $\mu > 1 + q^2$ 时不稳定; 当 $\mu = 1 + q^2$ 时, $\omega = qc = 0.5$, $a = -2q^5 - 4q^3$ 霍普夫分岔, $\mu > 1 + q^2$ 有稳定极限环。

5.17 变换为极坐标可以得到以 (x_0, y_0, z_0) 为初始条件的解为

$$(x, y, z) = \left(\frac{x_0 \cos \omega t}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + (1 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2})e^{-t}}, \frac{y_0 \sin \omega t}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + (1 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2})e^{-t}}, z \right),$$

$$\left(\frac{x_0 \sin \omega t + y_0 \cos \omega t}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + (1 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2})e^{-t}}, z e^{ct} \right)$$

返回平面 $y=0$ 的时间为 $\tau = 2\pi/\omega$, 庞加莱映射为 $P(x, z) = (x/[x + (1-x)e^{-\tau}], z e^{c\tau})$;

存在不动点 $(1, 0)$, 当 $c > 0$ 时雅可比矩阵本征值为 $e^{-\tau}$ 和 $e^{c\tau}$, 均小于 1。

第 六 章

6.2 b , 线性系统的李雅普诺夫指数是其本征值的实部。

6.3 否, 混沌必须为有界运动。

6.5 $\ln 4/\ln 3$ 。

6.6 $\ln 3/\ln 2$ 。

6.7 $-(P_L \ln P_L + P_R \ln P_R)$ 。

6.10 $x_0(t) = 2 \arctan(\sinh t)$, $\dot{x}_0(t) = 2 \operatorname{sech} t$;

$$M(\tau) = 2(a + f \operatorname{sech}(\omega\pi/2) \cos(\omega\tau));$$

$$f > a \cosh(\omega\pi/2)。$$

6.14 $\ddot{x} + x - x^2 + \epsilon x \cos \omega t = 0$;

$$x_0(t) = \frac{1}{2} \left(3 \tanh^2 \left(\frac{t}{2} \right) - 1 \right), \quad y_0(t) = \frac{3}{2} \tanh \left(\frac{t}{2} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{t}{2} \right).$$

$$M(\tau) = \frac{3\pi}{4} (1 - \omega^2) \csc h \pi \omega \sin \omega \tau。$$

参 考 文 献

- 1 Малкин И Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Ленинград: ОГИЗ, 1949
- 2 Stoker J J. Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems. New York: Interscience Publishers, 1950
(中译本: 斯托克 J J. 力学及电学系统中的非线性振动. 谢寿鑫等译. 上海: 上海科学技术出版社, 1963)
- 3 Булгаков Б В. Кослебания. Москва: ГИТТЛ, 1954
- 4 Митропольский Ю А. Нестационарные Процессы в нелинейных колебательных системах. Киев: Изд. АН УССР, 1955
- 5 Kauderer H. Nichtlineare Mechanik. Berlin: Springer-Verlag, 1958
- 6 Боголюбов Н Н, Митропольский Ю А. Асимптотические методы в теорий нелинейных колебаний. Москва: Физматгиз, 1958
(中译本: 包戈留包夫 Н Н, 米特罗波尔斯基 Ю А. 非线性振动理论中的渐近方法. 金福临等译. 上海: 上海科学技术出版社, 1963)
- 7 Андронов А А, Витт А А, Хайкин С Э. Теория колебаний. Москва: Физматгиз, 1959
(中译本: 安德罗诺夫 А А, 维特 А А, 哈依金 С Э. 振动理论. 高为炳等译. 北京: 科学出版社, 1981)
- 8 Minorsky N Nonlinear oscillations. Princeton: Van Nostrand, 1962
- 9 Hayashi C. Nonlinear oscillations in physical systems. New York: McGraw-Hill, 1964
- 10 Magnus K. Schwingungen. Stuttgart: Teubner, 1969
- 11 Meirovich L. Methods of analytical dynamics. New York: McGraw-Hill, 1970
- 12 Moser J. Stable and random motions in dynamical systems with special emphasis on celestial mechanics. Princeton: Princeton University Press, 1973
- 13 Nayfeh A H. Perturbation method. New York: John Wiley & Sons Co, 1973
(中译本: 奈弗 А Н. 摄动方法. 王辅俊等译. 上海: 上海科学技术出版社, 1984)
- 14 Dugundji J, Mukhopadhyay V. Lateral bending-torsion vibrations of a thin beam under parametric excitation. J. of Appl. Mechanics, 1973, 40(3): 693~698
- 15 Poore A B. On the theory and applications of the Hopf-Friedrichs bifurcation theory. Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1976, 60: 371~393

- 16 Abraham R, Marsden J E. Foundations of mechanics: A mathematical exposition of classical mechanics with an introduction to the qualitative theory of dynamical systems and applications to the three-body problem. Massachusetts: Benjamin, 1978
- 17 Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear oscillations. New York: John Wiley & Sons Co, 1979
(中译本: 奈弗 A H, 穆克 D T. 非线性振动. 宋家骥等译. 北京: 高等教育出版社, 1990)
- 18 Nayfeh A H. Introduction to perturbation techniques. New York: John Wiley & Sons Co, 1981
(中译本: 奈弗 A H. 摄动方法导论. 宋家骥译. 上海: 上海翻译出版公司, 1990)
- 19 Hassard B D, Kazarinoff N D, Wan Y H. Theory and applications of Hopf bifurcation. Cambridge: Cambridge University Press, 1981
- 20 Carr J. Applications of centre manifold theory. New York: Springer-Verlag, 1981
- 21 Chow S N, Hale J K. Methods of bifurcation theory. New York: Springer-Verlag, 1982
- 22 陈予恕. 非线性振动. 天津: 天津科技出版社, 1983
- 23 Kubicek M, Marek M. Computational methods in bifurcation theory and dissipative structures. New York: Springer-Verlag, 1983
- 24 叶彦谦等. 极限环论. 上海: 上海科学技术出版社, 1984
- 25 Szlenk W. An introduction to the theory of smooth dynamical systems. New York: John Wiley & Sons Co, 1984
- 26 季文美, 方同, 陈松淇. 机械振动. 北京: 科学出版社, 1985
- 27 张芷芳, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社, 1985
- 28 Nayfeh A H. Problems in perturbation. New York: John Wiley & Sons, 1985
(中译本: 奈弗 A H. 摄动方法习题集. 宋家骥, 戴世强译. 上海: 上海翻译出版公司, 1990)
- 29 Sanders J A, Verhulst F. Averaging methods in nonlinear dynamical systems. New York: Springer-Verlag, 1985
- 30 Smith D R. Singular - Perturbation theory: An introduction with applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1985
- 31 Golubitsky M, Schaeffer D G. Singularities and groups in bifurcation theory: Vol 1. New York: Springer-Verlag, 1985
- 32 郑兆昌, 丁奎元. 机械振动: 中册. 北京: 机械工业出版社, 1986
- 33 Thompson J M T, Stewart H B. Nonlinear dynamics and chaos: Geometrical methods for engineers and scientists. New York: John Wiley & Sons Co, 1986
- 34 Hsu C S. Cell-to-cell mapping: A method of global analysis for nonlinear systems.

- New York:Springer-Verlag,1987
- 35 丁文镜.工程中的自激振动.长春:吉林教育出版社,1988
 - 36 Arnold V I. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations. 2nd ed. New York:Springer-Verlag,1988
 - 37 Golubitsky M, Stewart I, Schaeffer D G. Singularities and groups in bifurcation theory: Vol 2. New York:Springer-Verlag,1988
 - 38 Wiggins S. Global bifurcations and chaos: Analytical methods. New York:Springer-Verlag,1988
 - 39 陆启韶.常微分方程的定性理论方法和分叉.北京:北京航空航天大学出版社,1989
 - 40 朱正佑,程昌钧.分支问题的数值计算方法.兰州:兰州大学出版社,1989
 - 41 Kreuzer K. 非线性动力学系统的数值研究.凌复华译.上海:上海交通大学出版社,1989
 - 42 李继彬.混沌与 Melnikov 方法.重庆:重庆大学出版社,1989
 - 43 舒仲周.运动稳定性.峨嵋:西南交通大学出版社,1989
 - 44 Hao Bai-Lin. Elementary symbolic dynamics and chaos in dissipative systems. Singapore:World Scientific,1989
 - 45 Hao Bai-Lin. Chaos II Singapore:World Scientific,1989
 - 46 Arnold V I. Mathematical methods of classical mechanics. 2nd ed. New York:Springer-Verlag,1989
 - 47 Thomas S P, Chua L O. Practical numerical algorithms for chaotic systems. New York:Springer-Verlag,1989
 - 48 Jackson E A. Perspectives of nonlinear dynamics. Vol 1; Vol 2. Cambridge:Cambridge University Press,1989;1991
 - 49 Ding M, Grebogi C, Ott E. Evolution of attractors in quasi-periodically forced systems: from quasiperiodic to strange nonchaotic to chaos. Phys Rev A, 1989, 39: 2593~2598
 - 50 Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. New York:Springer-Verlag,1990
 - 51 Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. 3rd ed. New York:Springer-Verlag,1990
 - 52 Allgower E, Georg K. Numerical continuation methods: An introduction. New York:Springer-Verlag,1990
 - 53 Wang D. An introduction to the normal form theory of ordinary differential equations. Adv Math, 1990, 19(1): 38~71
 - 54 Kapitaniak T. Chaotic oscillations in mechanical systems. Manchester: Manchester

- Univ Press, 1991
- 55 Zaslavsky G M, Sagdeev R Z, Usikov D A, et al. Weak chaos and quasi-regular patterns. Cambridge: Cambridge University Press, 1991
 - 56 Doedel E, Jepson A, Keller H. Numerical analysis and control of bifurcation problems. *Int J Bifurcation & Chaos*, 1991(1): 493~520, 745~772
 - 57 Tong X, Rimrott F P J. Numerical studies on chaotic planar motion of satellites in an elliptic orbit. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1991, 1: 176~186
 - 58 Yim S C S, Lin H. Chaotic behavior and stability of free-standing offshore equipment. *Ocean Engineering*, 1991, 18(3): 225~250
 - 59 Yeh J P, DiMaggio F. Chaotic motion of pendulum with support in circular orbit. *J Engineering Mechanics*, 1991, 117(2): 329~347
 - 60 王照林. 运动稳定性及其应用. 北京: 高等教育出版社, 1992
 - 61 陈予恕, 唐云, 陆启韶, 等. 非线性动力学中的现代分析方法. 北京: 科学出版社, 1992
 - 62 王海期. 非线性振动. 北京: 高等教育出版社, 1992
 - 63 Bush A W. Perturbation methods for engineers and scientists. New York: CRC Press, 1992
 - 64 Ott E. Chaos in dynamical systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1992
 - 65 Moon F C. Chaotic and fractal dynamics: An introduction for applied scientists and engineers. New York: John Wiley & Sons Co, 1992
 - 66 Lichtenberg A J, Leiberman M A. Regular and chaotic dynamics. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1992
 - 67 郝柏林. 从抛物线谈起: 混沌动力学引论. 上海: 上海科技教育出版社, 1993
 - 68 陈予恕. 非线性振动系统的分岔和混沌理论. 北京: 高等教育出版社, 1993
 - 69 戴德成. 非线性振动. 南京: 东南大学出版社, 1993
 - 70 Nayfeh A. Method of normal forms. New York: John Wiley & Sons Co, 1993
 - 71 Pailis J, Takens F. Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations. Cambridge: Cambridge University Press, 1993
 - 72 Shinbrot T, Grebogi C, Ott E, et al. Using small perturbation to control chaos. *Nature*, 1993, 363: 411~417
 - 73 Chen G, Dong X. From chaos to order: perspectives and methodologies in controlling chaotic nonlinear dynamical systems, *Int J Bifurcation & Chaos*, 1993, 3(3): 1363~1490
 - 74 Blazejczyk B, Kapitaniak T, Wojewoda J, Brindley J. Controlling chaos in mechanical systems. *Applied Mechanics Review*, 1993, 46: 385~391
 - 75 Allgower E, Georg K. Continuation and path following. *Acta Numerica*, 1993: 1~64

- 76 郑伟谋,郝柏林.实用符号动力学.上海:上海科技教育出版社,1994
- 77 刘曾荣.混沌的微扰判据.上海:上海科技教育出版社,1994
- 78 李继彬,赵晓华,刘正荣.广义哈密顿系统理论及其应用.北京:科学出版社,1994
- 79 周作领.符号动力系统.上海:上海科技教育出版社,1994
- 80 刘秉正.非线性动力学与混沌基础.长春:东北师范大学出版社,1994
- 81 Seydel R. Practical bifurcation and stability analysis: From equilibrium to chaos. New York: Springer-Verlag, 1994
- 82 Ott E, Sauer T, Yorke J A. Coping with chaos. New York: John Wiley & Sons Co, 1994
- 83 Nusse H E, Yorke J A. Dynamics: Numerical explorations. New York: Springer-Verlag, 1994
- 84 Argyris J, Faust G, Haase M. An exploration of chaos: An introduction for natural scientists and engineers. Amsterdam: North-Holland, 1994
- 85 季海波,武际可.分岔问题及其数值方法.力学进展,1994,23(4):493~502
- 86 陆启韶.分岔与奇异性.上海:上海科技教育出版社,1995
- 87 王光瑞,陈光旨.非线性常微分方程的混沌运动.南宁:广西科学技术出版社,1995
- 88 汪秉宏.弱混沌与准规则斑图.上海:上海科技教育出版社,1995
- 89 Nayfeh A H, Balachandran B. Applied nonlinear dynamics: Analytical, computational, and experiment methods. New York: John Wiley & Sons Co, 1995
- 90 Schuster H G. Deterministic chaos: An introduction. 3rd ed. New York: VCH, 1995
- 91 Holmes M H. Introduction to perturbation methods. New York: Springer-Verlag, 1995
- 92 张辉,吴淇泰.混沌运动的控制.力学进展,1995,25(3):392~399
- 93 Lindner J F, Ditto W. Removal, suppression and control of chaos by nonlinear design. Applied Mechanics Review, 1995, 48: 795~807
- 94 Shinbrot T. Progress in the control of chaos. Adv Phy, 1995, 44: 73~111
- 95 Szemplinska-Stupnicka W. The analytical predictive criteria for chaos and escape in nonlinear oscillators: a survey. Nonlinear Dynamics, 1995, 7(2): 129~147
- 96 Suire G, Cederbaum G. Periodic and chaotic behavior of viscoelastic nonlinear (elastica) bars under harmonic excitations. Int J Mech Sci. 1995, 37: 753~772
- 97 褚亦清,李翠英.非线性振动分析.北京:北京理工大学出版社,1996
- 98 邱家俊.机电耦联动力系统的非线性振动.北京:科学出版社,1996
- 99 程崇庆,孙义燧.哈密顿系统中的有序与无序运动.上海:上海科技教育出版社,1996

- 100 Wittenburg J. Schwingungslehre. Berlin: Springer-Verlag, 1996
- 101 Kevorkin J, Cole J D. Multiple scale and singular perturbation methods. Berlin: Springer-Verlag, 1996
- 102 Kozlov V V. Symmetries, topology, and resonances in Hamiltonian mechanics. New York: Springer-Verlag, 1996
- 103 Kapitaniak T. Controlling chaos: Theoretical and practical methods in nonlinear dynamics. New York: Academic, 1996
- 104 Lakshmanan M, Murali K. Controlling chaos in nonlinear oscillators. Singapore: World Scientific, 1996
- 105 方锦清. 非线性系统中混沌的控制与同步及其应用前景. 物理学进展, 1996, 16: 1~74, 137~201
- 106 胡海岩. 力学系统混沌的主动控制. 力学进展, 1996, 26(4): 453~463
- 107 张芷芬, 李承治, 郑志明, 等. 向量场的分岔理论基础. 北京: 高等教育出版社, 1997
- 108 Chen G, Moiola J L. Hopf bifurcation analysis: A frequency domain approach. Singapore: World Scientific, 1997
- 109 Grebogi C, Lai Y-C, Hayes S. Control and applications of chaos. Int J Bifurcation & Chaos, 1997, 7(10): 2175~2197
- 110 Jackson E A. The OPCL control method for entrainment, model-resonance and migration action on multiple-attractor systems. Chaos, 1997, 7(4): 550~559
- 111 唐云. 对称性分岔理论基础. 北京: 科学出版社, 1998
- 112 Chen G, Dong X. From chaos to order. Singapore: World Scientific, 1998
- 113 Kawakami H. Numerical methods for chaotic dynamical systems. Singapore: World Scientific, 1998
- 114 Zaslavsky G M. Physics of chaos in Hamiltonian systems. London: Imperial College Press, 1998
- 115 Kitchens B P. Symbolic Dynamics: One-sided, two-sided and countable state Markov shifts. New York: Springer-Verlag, 1998
- 116 刘延柱, 陈立群, 彭建华. 航天器混沌姿态运动研究进展综述. 自然科学进展, 1998, 8(4): 386~390
- 117 陈立群, 刘延柱. 控制混沌研究现状与展望. 上海交通大学学报, 1998, 32(1): 108~114
- 118 陈立群, 刘延柱. 混沌的抑制研究进展综述. 力学进展, 1998, 28(3): 289~299
- 119 Arecchi FT, Boccaletti S, Ciofini M, et al. The control of chaos: theoretical schemes and experimental realizations. Int J Bifurcation & Chaos, 1998, 8(8): 1643~1655
- 120 Shilnikov L. Mathematical problems of nonlinear dynamics: a tutorial. J Bifurcation

- & Chaos,1998,8(9):1953~2001
- 121 Ge Z M. Nonlinear and chaotic dynamics of satellite. Taipei;Gao Lih,1999
- 122 胡海岩.应用非线性动力学.北京:航空工业出版社,2000
- 123 刘延柱,陈立群.非线性动力学.上海:上海交通大学出版社,2000
- 124 胡岗.混沌控制.上海:上海科技教育出版社,2000
- 125 Virgin L N. Introduction to experimental nonlinear dynamics; A case study in mechanical vibration. Cambridge;Cambridge Univ. Press,2000
- 126 刘延柱,陈立群,成功,等.航天器姿态动力学中的稳定性、分岔和混沌.力学进展,2000,30(3):351~357
- 127 Chen G, Moiola J L, Wang H O. Bifurcation control: theories, methods, and applications. Int J Bifurcation & Chaos,2000,10(3):511~548
- 128 Wang X F, Chen G R. Chaotification via arbitrarily small feedback controls: theory, method, and applications. Int J Bifurcation & Chaos,2000,10(3):549~570
- 129 刘向东,黄文虎.混沌系统延迟反馈控制的理论与实验研究.力学进展,2001,31(1):18~32
- 130 Chen L Q, Liu Y Z. Chaotic attitude motion of a magnetic rigid spacecraft and its control. International Journal of Non-Linear Mechanics,2001
- 131 王光瑞,于熙龄,陈式刚.混沌的控制、同步与利用.北京:国防工业出版社,2001

索引

A

阿诺德扩散 (Arnold diffusion) 6.5.3
阿诺德网络 (Arnold web) 6.5.3
鞍点 (saddle) 1.2.3, 1.3.2
鞍焦点 (saddle-focus) 6.4.4
鞍焦型同宿轨道 (homoclinic orbit to a saddle-focus) 6.4.4
鞍结点 (saddle-node) 5.1.4
鞍结分岔 (saddle-node bifurcation) 5.1.4

B

半稳定极限环 (semi-stable limit cycle) 1.4.2
邦邦控制 (bang-bang control) 1.2.3
饱和现象 (saturation phenomenon) 2.7.5
保守系统 (conservative system) 1.1.3, 6.5.1
爆发 (burst) 6.1.3
倍频响应 (harmonics response) 2.2.2
倍周期分岔 (period doubling bifurcation) 5.7.4, 6.1.3
本征值共振 (eigenvalue resonance) 5.4.3
闭轨迹分岔 (bifurcation at closed orbits) 5.7.1
边界激变 (boundary crisis) 6.1.3
伯克霍夫-庞加莱定理 (Poincaré-Birkhoff theorem) 6.5.2

不变环面 (invariant torus) 6.5.1
不变流形 (invariant manifold) 5.3.3
不变子空间 (invariant subspace) 5.3.2
不动点 (fixed point) 1.4.2, 5.7.3
不可积系统 (nonintegrable system) 6.5.1
不确定指数 (uncertainty exponent) 6.3.3
不稳定 (unstable) 1.1.2, 1.4.2
不稳定度 (degree of instability) 1.1.4
不稳定极限环 (unstable limit cycle) 1.4.2
不稳定焦点 (unstable focus) 1.2.6, 1.3.2
不稳定结点 (unstable node) 1.2.6, 1.3.2
不稳定流形 (unstable manifold) 5.3.3
不稳定子空间 (unstable subspace) 5.3.2

C

参变系统 (unsteady system) 4.0
参数振动 (parametric vibration) 4.0
 k 参数开折 (k -parameter unfolding) 5.5.3
测试函数 (test function) 5.8.3
叉式分岔 (pitchfork bifurcation) 5.1.4
差型组合共振 (difference resonance) 4.6.1
常数变易法 (method of alternating constants) 2.4.1

颤振 (flutter) 3.2.3
 超混沌 (hyperchaos) 6.3.2
 超临界叉式分岔 (supercritical pitchfork bifurcation) 5.1.4
 超临界分岔 (supercritical bifurcation) 2.5.6
 超胖吸引子 (superfat attractor) 6.3.3
 超谐波共振 (ultraharmonic resonance) 2.6.3
 k 重极限环 (k -multiple limit cycle) 1.4.2
 持久的 (persistent) 5.5.3
 次共振 (secondary resonance) 2.5.6
 稠密 (dense) A.5.1
 稠密轨道 (dense orbit) A.5.1
 初等分岔 (elementary bifurcations) 5.5.4
 初态敏感性 (sensitivity to initial state) 6.1.1

D

达芬方程 (Duffing equation) 1.2.3
 达芬系统 (Duffing system) 2.1.3
 单重极限环 (simple limit cycle) 1.4.2
 岛链 (islands chain) 6.5.2
 等倾线法 (isocline method) 1.2.5
 等倾线族 (isocline set) 1.2.5
 等势线 (level curve) 6.5.2
 等效线性化方法 (equivalent linearization method) 10.6
 点映射 (point mapping) 1.4.2
 点状维数 (pointwise dimension) 6.3.3
 KAM 定理 (Kolmogorov-Arnol d-Moser theorem) 6.5.1
 定性分析方法 (qualitative method) 0.2
 动力学系统 (dynamical system) 1.1.1

动态分岔 (dynamic bifurcation) 2.1.6, 3.3.3, 5.1.2
 动相平面 (moving phase plane) 2.4.2
 多尺度法 (multiscale method) 2.5.1
 多势阱系统 (multiwell potential system) 6.4.4

E

二次霍普夫分岔 (secondary Hopf bifurcation) 5.7.4

F

KBM 法 (Krylor-Bogoliubov-Mitropolsky method) 2.6.1
 翻转分岔 (flip bifurcation) 5.7.4
 范德波尔方程 (van der Pol equation) 1.4.1
 泛音 (overtone) 2.3.1
 OGY 方法 (Ott-Grebogi-Yorke approach) 6.6.2
 非持久的 (nonpersistent) 5.5.3
 非双曲奇点 (nonhyperbolic singular point) 1.3.3
 非完全分岔 (imperfect bifurcation) 5.5.3
 非完全性 (imperfection) 5.5.3
 非线性振动 (nonlinear vibration) 0.1
 非有理通约 (incommensurable) 6.5.1
 非自治系统 (nonautonomous system) 1.1.3
 分岔 (bifurcation) 1.2.4, 5.1.2
 分岔参数 (bifurcation parameter) 1.2.4, 5.1.2
 分岔的控制 (control of bifurcation) 5.6.5
 分岔点 (bifurcation point) 1.2.4, 5.1.2

分岔集 (bifurcation set) 5.1.2
 分岔图 (bifurcation diagram) 5.1.2
 分岔值 (bifurcation value) 5.1.2
 分隔线 (separatrix) 1.2.3
 分形 (fractal) 6.3.3
 分形盆边界 (fractal basin boundary)
 6.3.3

弗洛凯理论 (Floquet theory) 4.3.1
 符号 (symbol) A.5.1
 符号动力学 (symbolic dynamics)
 A.5.1
 符号空间 (symbolic space) A.5.1
 符号序列 (symbolic sequence) A.5.1
 负刚度系统 (negative stiffness system)
 1.2.3
 负阻尼 (negative damping) 1.2.6

G

戈鲁比茨基-沙弗范式 (Golubitsky -
 Schaeffer normal form) 5.5.2
 功率谱 (power spectral) 6.3.4
 共轭算子法 (adjoint operator method)
 5.4.5
 共振 (resonance) 0.4.2
 共振的阶 (order of resonance) 5.4.3
 共振控制 (resonant control) 6.6.3
 共振带 (resonance zone) 6.5.2
 共振等势线 (resonant level curve)
 6.5.2
 共振项 (resonance term) 5.4.2
 固有频率 (natural frequency) 0.4.1
 孤岛 (island) 6.5.2
 孤立运动积分 (isolating integrals of
 motion) 6.5.1
 关联维数 (correlation dimension)
 6.3.3

广义维数 (generalized dimension)
 6.3.3
 轨道稳定性 (orbital stability) 1.4.2
 规范形式 (normal form) 5.4.2

H

哈密顿函数 (Hamiltonian function)
 6.5.1
 哈密顿系统 (Hamiltonian system)
 6.5.1
 哈密顿映射 (Hamiltonian map) 6.5.2
 哈密顿正则方程 (Hamilton canonical
 equations) 6.5.1
 豪斯多夫维数 (Hausdorff dimension)
 6.3.3
 耗散系统 (dissipative system) 1.2.6
 和型组合共振 (summation resonance)
 4.6.1
 横截同宿点 (transverse homoclinic point)
 6.4.2
 横截异宿点 (transverse heteroclinic
 point) 6.4.2
 后继点 (successive point) 1.4.2
 后继函数 (successive function) 1.4.2
 蝴蝶效应 (butterfly effect) 6.1.1
 n 环面 (n -tori) 6.5.1
 KAM 环面 (Kolmogorov-Arnold-Moser
 tori) 6.5.1
 混沌 (chaos) 6.1.1
 混沌的控制 (control of chaos) 6.6.1
 混沌轨道的引导 (direction of chaotic
 orbit) 6.6.1
 混沌的抑制 (suppression of chaos)
 6.6.1
 混沌的镇定 (stabilization of chaos)
 6.6.1

混沌同步化 (synchronization of chaos)
6.6.1
混沌吸引子 (chaotic attractor) 6.3.3
混沌振动 (chaotic oscillation) 6.1.1
混叠 (aliasing) 6.3.4
霍普夫分岔 (Hopf bifurcation) 3.3.3,
5.6.1

J

基本解 (fundamental solution) 2.1.2,
4.3.1
激变 (crisis) 6.1.3
激变临界指数 (critical exponent of the
crisis) 6.1.3
激变诱导的阵发性 (crisis - induced
intermittency) 6.1.3
极限环 (limit cycle) 1.4.1
几何方法 (geometric method) 0.2
计算机噪声 (computer noise) 0.2
伽辽金法 (Galerkin method) 2.1.1
渐近法 (asymptotic method) 2.6.1
渐近稳定 (asymptotically stable)
1.1.2, 1.4.2
焦点 (focus) 1.3.2
 q 阶广义维数 (q - order generalized
dimension) 6.3.3
 r 阶庞加莱-伯克霍夫范式 (r - order
Poincaré - Birkhoff normal form)
5.4.2
接触等价 (contact equivalence) 5.5.2
结点 (node) 1.3.2
结构不稳定 (structurally unstable)
5.1.1
结构稳定性 (structural stability) 5.1.1
截面映射 (section map) 5.7.2
解析方法 (analytical method) 0.2

近可积系统 (near integrable system)
6.5.1
近似解析方法 (approximate analytical
method) 0.2
静态分岔 (static bifurcation) 1.2.4,
5.1.2
久期项 (secular term) 2.2.4
局部分岔 (local bifurcation) 5.1.2
局部混沌 (local chaos) 6.5.2
局部不变流形 (local invariant manifold)
5.3.4
局部不稳定流形 (local unstable
manifold) 5.3.3
局部稳定流形 (local stable manifold)
5.3.3
局部中心流形 (local centre manifold)
5.3.4
矩阵表示法 (matrix representation
method) 5.4.4

K

卡普兰 - 约克猜想 (Kaplan - Yorke
conjecture) 6.3.3
开折 (unfolding) 5.1.1
开折参数 (unfolding parameter) 5.5.3
康托集合 (Cantor set) 6.3.3
柯尔莫戈洛夫含混吸引子 (vague
attractor of Kolmogorov) 6.5.2
柯尔莫戈洛夫容量维数 (Kolmogorov
capacity dimension) 6.3.3
可积系统 (integrable system) 0.2,
6.5.1
空间混沌 (spatial chaos) 6.1.4
控制参量 (control parameter) 5.1.2
跨临界分岔 (transcritical bifurcation)
5.1.4

宽度 (width) A.5.3

扩张系统 (expanded system) 5.3.6

L

拉格朗日定理 (Lagrange theorem)

1.1.3

离散系统 (discrete system) 0.2, 11.1

李雅普诺夫函数 (Lyapunov function)

1.1.3

李雅普诺夫维数 (Lyapunov dimension)

6.3.3

李雅普诺夫-施密特约化 (Lyapunov-Schmidt reduction) 5.2.2

李雅普诺夫直接方法 (Lyapunov direct method) 1.1.3

李雅普诺夫指数 (Lyapunov exponent)

6.3.2

列纳法 (Lienard method) 1.2.5

临界值 (critical value) 5.1.2

林滋泰德-庞加莱法 (Linstedt-Poincaré method) 2.3.1

流体喘振 (liquid surge) 3.2.4

流形 (manifold) 5.3.3

C^m 流形 (C^m -manifold) 5.3.3

M

马蒂厄方程 (Mathieu equation) 4.1.2

马蒂厄函数 (Mathieu function) 4.4.2

马蹄映射 (horseshoe map) A.5.2

慢变振幅法 (slowly-varying amplitude method) 2.4.1

梅利尼科夫方法 (Melnikov method)

6.4.3

模态参数 (modal parameter) 5.7.2

N

内禀随机性 (intrinsic stochasticity)

6.1.1

内部激变 (interior crisis) 6.1.3

内共振 (internal resonance) 2.7.4

内依马克-沙克分岔 (Neimark-Sacker bifurcation) 5.7.4

拟弧长算法 (pseudo-arclength algorithm) 5.8.2

拟简谐振动 (quasi-harmonic vibration) 3.3.1

P

派生解 (generating solution) 2.1.2

派生系统 (generating system) 2.1.2

庞加莱-伯克霍夫范式 (Poincaré-Birkhoff normal form) 5.4.2

庞加莱-本迪克生定理 (Poincaré-Bendixon theorem) 1.4.4

庞加莱映射 (Poincaré map) 5.7.2

庞加莱指数 (index of Poincaré) 1.4.3

盆边界 (basin boundary) 6.3.3

频率耦合 (frequency coupling) 2.2.3

频率拖带 (entrainment of frequency) 6.6.3

平凡吸引子 (trivial attractor) 6.3.3

平面系统 (planar system) 1.3.1

平衡点 (equilibrium point) 1.2.2

平均法 (averaging method) 2.4.1

平均化方程 (averaged equation) 2.4.1

普适开折 (universal unfolding) 5.5.3

普用开折 (versal unfolding) 5.5.3

Q

歧点 (bifurcating point) 5.5.3

奇点 (singular point) 1.2.2

奇点指数 (index of singular point) 1.4.3

奇异点 (singularity) 5.1.3
 奇异摄动法 (singular perturbation method) 2.2.4
 奇怪吸引子 (strange attractor) 6.3.3
 迁移集 (transition set) 5.5.3
 强等价 (strong equivalence) 5.5.2
 切分岔 (tangent bifurcation) 5.7.4
 切空间 (tangent space) 6.3.2
 KAM 曲面 (Kolmogorov-Arnol d-Moser surface) 6.5.1
 全局不稳定流形 (global unstable manifold) 5.3.3
 全局分岔 (global bifurcation) 5.1.2
 全局混沌 (global chaos) 6.5.2
 全局稳定流形 (global stable manifold) 5.3.3

R

扰动 (disturbance) 1.1.1
 扰动方程 (disturbance equation) 1.1.1
 弱非线性系统 (weak nonlinear system) 2.1.2
 瑞利方程 (Rayleigh equation) 1.4.1

S

渗透现象 (saturation phenomenon) 2.7.5
 摄动法 (perturbation method) 2.2.1
 什尔尼科夫方法 (Shilnikov method) 6.4.4
 识别问题 (recognition problem) 5.5.2
 识别条件 (recognition condition) 5.5.2
 势阱 (potential well) 6.4.5
 时空混沌 (spatiotemporal chaos) 6.1.4
 首次返回映射 (first return map) 5.7.2

收敛域 (convergent region) 6.6.3
 受扰运动 (disturbed motion) 1.1.1
 输电线舞动 (power line galloping) 3.2.3
 输送控制 (entrainment control) 6.6.3
 输送盆 (basin of entrainment) 6.6.3
 数值方法 (numerical method) 0.2
 竖直曲线 (vertical curve) A.5.3
 竖直条 (vertical strip) A.5.3
 双极限点 (double limit point) 5.5.3
 双曲闭轨 (hyperbolic closed orbit) 1.4.2, 5.7.3
 双曲鞍点 (hyperbolic saddle) 1.1.4
 双曲不动点 (hyperbolic fixed point) 1.1.4
 双曲点 (hyperbolic point) 6.5.2
 双曲奇点 (hyperbolic singular point) 1.3.3
 双曲周期轨道 (hyperbolic periodic orbit) 1.1.4
 水平曲线 (horizontal curve) A.5.3
 水平条 (horizontal strip) A.5.3
 斯梅尔-伯克霍夫同宿定理 (Smale-Birkhoff homoclinic theorem) A.5.2
 斯梅尔马蹄映射 (Smale horseshoe map) 6.4.2, A.5.2
 斯梅尔马蹄 (Smale horseshoe) A.5.2
 死区 (dead zone) 1.2.6
 随机层 (stochastic layer) 6.5.2
 随机混沌 (stochastic chaos) 6.1.4
 锁相 (phase locking) 5.7.4

T

特征函数 (characteristic function) 4.4.2

特征指数 (characteristic index) 1.4.6
 跳跃现象 (jump phenomenon) 2.1.6, 2.7.5
 通有性 (genericity) 5.1.2
 同步现象 (synchronization phenomenon) 3.5.2
 同胚 (homeomorphism) 5.1.1
 同宿点 (homoclinic point) 6.4.2
 同宿分岔 (homoclinic bifurcation) 5.1.5
 同宿轨道 (homoclinic orbit) 5.1.5, 6.4.2
 退化性 (degeneracy) 5.1.2
 椭圆点 (elliptic point) 6.5.2
 拓扑共轭 (topological conjugacy) A.5.2
 拓扑轨道等价 (topologically orbit equivalent) 5.1.1

W

微分流形 (differentiable manifold) 5.3.3
 纬垂 (suspension) 5.7.2
 未扰运动 (undisturbed motion) 1.1.1
 稳定图 (stability diagram) 4.4.1
 稳定 (stable) 1.1.2, 1.4.2
 稳定极限环 (stable limit cycle) 1.4.2
 稳定焦点 (stable focus) 1.2.6, 1.3.2
 稳定结点 (stable node) 1.2.6, 1.3.2
 稳定流形 (stable manifold) 5.3.3
 稳定子空间 (stable subspace) 5.3.2
 稳态运动 (steady motion) 1.1.1
 稳态响应 (steady-state response) 0.4.2
 无切点线段 (transverse segment) 1.4.2

X

吸引集 (attracting set) 1.1.6

吸引盆 (basin of attraction) 1.1.6
 吸引性 (attractiveness) 1.1.6
 吸引域 (domain of attraction) 1.1.6
 吸引子 (attractor) 1.1.6
 吸引子合并激变 (attractor merging crisis) 6.1.3
 希尔方程 (Hill equation) 4.1.2
 系统 (system) 1.1.1
 线性振动 (linear vibration) 0.1
 相点 (phase point) 1.1.1, 1.2.1
 相轨迹 (phase trajectory) 1.1.1, 1.2.1
 相轨迹族 (phase trajectory) 1.2.1
 相空间 (phase space) 1.1.1
 相平面 (phase plane) 1.2.1
 相位差 (phase difference) 0.4.1
 相柱面 (phase cylinder) 1.2.3
 小参数 (small parameter) 2.1.2
 小参数法 (small parameter method) 2.2.1

谐波平衡法 (harmonic balance method) 2.1.1
 谐波线性化法 (harmonic linearization method) 2.4.3
 信息维数 (information dimension) 6.3.3

Y

亚临界叉式分岔 (subcritical pitchfork bifurcation) 5.1.4
 亚谐波共振 (subharmonic resonance) 2.3.3, 2.5.6, 2.6.3
 亚谐波响应 (subharmonic response) 2.3.3
 延续原理 (principle of continuation) 5.8.2
 移位自同构 (shift automorphism)

A.5.1
 异宿点 (heteroclinic point) 6.4.2
 异宿分岔 (heteroclinic bifurcation)
 5.1.5
 异宿环 (heteroclinic cycle) 6.4.2
 异宿轨道 (heteroclinic orbit) 5.1.5,
 6.4.2
 有缺陷的分岔 (bifurcation with defect)
 5.1.4
 有势阱系统 (system with potential well)
 6.4.5
 有限确定性 (finite determinacy) 5.5.2
 有滞后的分岔 (bifurcation with
 hysteresis) 5.1.4
 余维数 (codimension) 5.5.3
 预测-校正方法 (predictor-corrector
 algorithm) 5.8.2
 约化方程 (reduced equation) 5.2.2
 约化系统 (reduced system) 5.3.4
 约化原理 (reduction principle) 5.3.4
 约化函数 (reduced function) 5.2.2

Z

暂态混沌 (transient chaos) 6.1.4
 暂态响应 (transient response) 2.1
 张弛振动 (relaxation vibration) 3.3.1
 噪声诱导的激变 (noise-induced crises)
 6.1.3
 折叠分岔 (fold bifurcation) 5.7.4
 振荡 (oscillation) 0.1
 振动 (vibration) 0.1
 振动系统 (vibrating system) 1.1.1
 振幅 (amplitude) 0.4.1
 阵发性 (intermittency) 6.1.3
 阵发性爆发 (intermittent bursting)
 6.1.3

阵发性交换 (intermittent switching)
 6.1.3
 镇定控制 (stabilization control) 6.6.2
 正规摄动法 (fundamental perturbation
 method) 2.2.1
 正规解 (fundamental solution) 4.3.2
 正则变换 (canonical transformation)
 6.5.1
 滞后点 (hysteresis) 5.5.3
 中心 (center) 1.2.3, 1.3.2
 中心流形定理 (centre manifold theorem)
 5.3.4
 中心子空间 (center subspace) 5.3.2
 终态敏感性 (final state sensitivity)
 6.3.3
 周期 (period) 0.4.2, 5.7.3
 周期点 (periodic point) 5.7.3
 周期轨道 (periodic orbit) 5.7.3
 主共振 (principal resonance)
 2.5.6, 2.6.3
 状态变量 (state variable) 1.1.1
 状态方程 (state equation) 1.1.1
 状态空间 (state space) 1.1.1
 转折点 (turning point) 5.8.3
 准周期环面破裂 (break of quasi-periodic
 torus) 6.1.3
 字母表 (alphabet) A.5.1
 自发随机性 (spontaneous stochasticity)
 6.1.1
 自激系统 (self-excited system) 3.1.1
 自激振动 (self-excited vibration)
 1.4.1, 3.1.1
 自相关函数 (autocorrelation) 6.3.4
 自相似性 (self-similarity) 6.3.3
 自治系统 (autonomous system) 1.1.3
 组合频率 (combination frequency)

2.2.3	作为芽相等 (equal as germs) 5.5.2
最大李雅普诺夫指数 (maximum Lyapunov exponent) 6.3.2	作用-角度变量 (action-angle variables) 6.5.1

外国人名译名对照表

Abraham, R.	亚伯拉罕	Heiles, C.	海尔斯
Baker, J. G.	贝克	Helmholtz, H.	亥姆霍兹
Bendixon, I. O.	本迪克生	Henon, M.	埃依
Bernoulli, D. I.	伯努利	Hesse, L. O.	黑赛
Birkhoff, G. D.	伯克霍夫	Hill, G. W.	希尔
Bowen, R.	鲍文	Holmes, P. J.	霍尔姆斯
Cantor, G.	康托	Hopf, E.	霍普夫
Cartwright, M. L.	卡特莱特	Huygens, C.	惠更斯
Cauchy, A. L.	柯西	Jackson, E. A.	杰克逊
Cooley, J. W.	库利	Jacobi, C. G. J.	雅可比
d'Alembert, J. le R.	达朗贝尔	Jordan, M. E. C.	若当
Den Hartog, J. P.	邓哈托	Kaplan, L. D.	卡普兰
Devaney, R.	德凡尼	Kelley, A.	凯利
Duffing, G.	达芬	Kirchhoff, G. R.	基尔霍夫
Duhamel, J. M. C.	杜哈梅	Lagrange, J. L.	拉格朗日
Euclid	欧几里德	Landau, L. D.	朗道
Euler, L.	欧拉	Levinson, N.	莱文森
Faraday, M.	法拉地	Li, T. Y.	李天岩
Feigenbaum, F. J.	费根鲍姆	Lie, M. S.	李
Floquet, G.	费洛凯	Lindstedt, A.	林滋泰德
Fourier, J. B. J.	傅里叶	Liénard, A.	列纳
Galilei, G.	伽里略	Lipschitz, R. O. S.	李普希茨
Gollub, J. P.	郭勒卜	Littlewood, J. E.	李特伍德
Golubitsky, M.	戈鲁比茨基	Manneville, P.	曼尼维尔
Grebogi, C.	格列鲍吉	Marsden, J. E.	马斯登
Hadamard, J. S.	阿达玛	Mather, J. N.	马瑟
Hamilton, W. R.	哈密顿	Mathieu, F.	马蒂厄
Haupt, O.	霍普特	Melde, F.	麦尔德
Hausdorff, F.	豪斯多夫	Metropolis, N.	米特罗波利斯
Hayashi, C.	林千博	Möbius, A. F.	麦比乌斯

Morse, M.	莫尔斯	Wisdom, J.	威兹德姆
Moser, J.	莫泽	Wronsky, H. J. M	朗斯基
Nayfeh, A. G.	奈弗	Yorke, J. A.	约克
Newhouse, S. E.	纽豪斯	Андронов, А. А.	
Newton, I.	牛顿	(Andronov A. A.)	安德罗诺夫
Noether, E.	诺特	Арнольд, В. А.	
Ott, E.	奥特	(Arnold, V. A.)	阿诺尔德
Peixoto, M.	比索杜	Боголюбов Н. Н.	
Perron, O.	珀仑	(Bogoliubov, N. N.)	包戈留包夫
Pliss, V.	普利斯	(Галёркин, В. А.)	
Poincaré, H.	庞加莱	(Galerkin, B. G.)	伽辽金
Poisson, S. -D.	泊松	Колмогоров, А. Н.	
Pomeau, Y.	玻莫	(Kolmogorov, A. N.)	柯尔莫戈洛夫
Rayleigh, J. W. S.	瑞利	Крылов, Н. М.	
Ruelle, D.	茹厄勒	(Крылов, Н. М.)	克雷洛夫
Sacker, R. J.	沙克	Ляпунов, А. М.	
Schaeffer, D. G.	沙弗	(Ляпунов, А. М.)	李雅普诺夫
Schmidt, E.	施密特	Мельников, В. К.	
Sinai, Y. G.	西奈	(Melnikov, V. K.)	梅利尼科夫
Smale, S.	斯梅尔	Митропольский, Ю. А.	
Sturrock, P. A.	斯特罗克	(Mitropolsky, Y. A.)	米特罗波尔斯基
Swinney, H. L.	斯文尼	Неймарк, Ю. И.	
Takens, F.	塔肯斯	(Neimark, Y. I.)	内依马克
Taylor, B.	泰勒	Понтрягин, Л. С.	
Thom, R.	托姆	(Pontryagin, L. S.)	庞特里雅金
Tukky, J. W.	特基	Хинчин, А. Я.	
Ueda, Y.	上田	(Khinchin, A. Y.)	辛钦
van der Pol, B.	范德波尔	Шилников, Л. П.	
Whitney, H.	惠特尼	(Shilnikov, L. P.)	什尔尼科夫
Wiener, N.	维纳		

Synopsis

The objective of this book is to impart a systematic understanding of theoretical basic and analytical approaches of nonlinear vibrations. The book covers the classical theory of nonlinear vibrations and the modern developments of nonlinear dynamics. The physical interpretations of various nonlinear vibrations are emphasized. Some practical examples of nonlinear vibrations are given, to present the engineering background.

The introduction starts with a general explanation of objectives and methods of nonlinear vibrations, a brief review of its history, and a concise survey of main results of linear vibrations.

Chapters 1 and 2 are devoted to the qualitative methods and the approximate analytical methods of nonlinear vibrations respectively. Chapter 1 deals with stability theory and geometric methods, containing singularities and limit cycles in phase plane. In chapter 2 some approximate analytical methods, such as harmonic balance method, fundamental perturbation method, Linstedt-Poincaré method, averaging method, multiscale method and asymptotic method, are illustrated. The free and forced vibrations of nonlinear systems with single and multi-degree of freedom are discussed by use of various analytical methods.

As two typical nonlinear vibrations, the self-excited and parametric vibrations are the objects of study in chapters 3 and 4. The physical nature and engineering examples of both vibrations are given. In chapter 3 the qualitative and quantitative methods are applied simultaneously to study the self-excited vibrations. In chapter 4 the Floquet theory is introduced, and the stability diagrams for the systems under the impulsive and harmonic parametric excitation are analyzed. The self-excited and parametric vibrations with multi-degree of freedom are discussed in examples.

Chapters 5 and 6 provide the modern developments of nonlinear dynamics, including the bifurcation theory and chaotic vibrations. Chapter 5 includes the fundamental concepts of bifurcation theory, Lyapunov-Schmidt reduction method, center manifold approach, the normal forms of Poincaré-Birkhoff, singularity theory Hopf bifurcation and bifurcation of closed trajectories. In chapter 6 the basic concepts of chaos and its engineering examples are presented. The physical meanings, geometric structures, transition processes, numerical identifications and analytical predictions of chaotic vibrations are provided. Some special topics, such as control of bifurcation, numerical method of bifurcation, chaos in Hamiltonian

systems and control of chaos are involved in both chapters too.

Seven appendixes relate to some mathematical details. Appropriate exercises are given for each chapter, and key to those exercises can be found at the end of the book.

The book is intended to serve as a textbook for graduate students majored in engineering mechanics, mechanical engineering, aeronautical engineering, civil engineering, and control engineering. The book can serve also as a reference book for the technicians working in fields concerning nonlinear vibrations.

Contents

Introduction

- § 0.1 Objects of Nonlinear Vibrations
- § 0.2 Methods of Nonlinear Vibrations
- § 0.3 Short History of Nonlinear Vibrations
- § 0.4 Main Results of Linear Vibrations with Single-Degree of Freedom

Chapter 1 Qualitative Methods for Nonlinear Vibrations

- § 1.1 Basic Concepts of Stability
- § 1.2 Phase Plane, Phase Trajectories and Singularities
- § 1.3 Classification of Singularities
- § 1.4 Limit Cycles

Exercises

Chapter 2 Approximate Analytical Methods for Nonlinear Vibrations

- § 2.1 Harmonic Balance Method
- § 2.2 Fundamental Perturbation Method
- § 2.3 Linstedt-Poincaré Method
- § 2.4 Averaging Method
- § 2.5 Multiscale Method
- § 2.6 Asymptotic Method
- § 2.7 Free and Forced Vibrations with Multi-Degree of Freedom

Exercises

Chapter 3 Self-Excited Vibrations

- § 3.1 Survey of Self-Excited Vibrations
- § 3.2 Self-Excited Vibrations in Engineering
- § 3.3 Qualitative Investigation of Self-Excited Vibrations
- § 3.4 Quantitative Calculation of Self-Excited Vibrations
- § 3.5 Forced Vibrations of Self-Excited Systems
- § 3.6 Self-Excited Vibrations with Multi-Degree of Freedom

Exercises

Chapter 4 Parametric Vibrations

- § 4.1 Survey of Parametric Vibrations

- § 4.2 Parametric Vibrations in Engineering
- § 4.3 Floquet Theory
- § 4.4 Stability Diagram
- § 4.5 Nonlinear Parametric Vibrations
- § 4.6 Parametric Vibrations with Multi-Degree of Freedom

Exercises

Chapter 5 Basic of Bifurcation Theory

- § 5.1 Bifurcation Phenomena
- § 5.2 Liapunov-Schmidt Reduction
- § 5.3 Center Manifold Method
- § 5.4 Poincaré-Birkhoff Normal Form
- § 5.5 Singularity Theory
- § 5.6 Hopf Bifurcation and its Control
- § 5.7 Bifurcation of Closed Trajectories
- § 5.8 Numerical Method of Bifurcation

Exercises

Chapter 6 Chaotic Vibrations

- § 6.1 Survey of Chaotic Vibrations
- § 6.2 Chaotic Vibrations in Engineering
- § 6.3 Numerical Identifications of Chaotic Vibrations
- § 6.4 Analytical Prediction of Chaotic Vibrations
- § 6.5 Chaotic Vibrations in Hamiltonian Systems
- § 6.6 Control of Chaotic Vibrations

Exercises

Appendix

- Appendix 1 Proof of Lyapunov Stability Theorem
- Appendix 2 Proof of Stability Theorem of Closed Trajectories
- Appendix 3 Mathematical Basic of Small Parameter Method
- Appendix 4 Proof of Planar Hopf Bifurcation Theorem
- Appendix 5 Topological Description of Chaos
- Appendix 6 Derivation of Melnikov Function
- Appendix 7 Outline of Proof of Shilnikov Theorem

Key to Exercises

References

Index

English-Chinese Bilingual Name-List

Synopsis

Contents

A Brief Introduction to the Authors